

数学演習第一 (演習第 1 回)

微積：極限值, 逆三角関数

2021 年 4 月 28 日

要点

基本的な極限值

- 三角関数: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- 指数・対数関数: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ ($\Leftrightarrow e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$)

逆三角関数

- $y = \text{Sin}^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y \quad \left(-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$
- $y = \text{Cos}^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y \quad \left(-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\right)$
- $y = \text{Tan}^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y \quad \left(x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

1 小テスト問題

問 1 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{1/x}$ は?

〈選択肢: A. 0 B. 1 C. e D. ∞ 〉

問 2 $\text{Cos}^{-1} 0$ の値は?

〈選択肢: A. 0 B. 1 C. $\pi/2$ D. π 〉

問 3 $\text{Tan}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の値は?

〈選択肢: A. $-\pi/6$ B. $\pi/6$ C. $\pi/3$ D. $5\pi/6$ 〉

問 4 $\text{Sin}^{-1}\left(\sin\left(-\frac{9\pi}{7}\right)\right)$ の値は?

〈選択肢: A. $-9\pi/7$ B. $-3\pi/7$ C. $2\pi/7$ D. $4\pi/7$ 〉

2 レポート課題 (答だけでなく計算過程も書くこと.)

問題 1 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ を求めよ. (a, b は $ab \neq 0$ なる定数)

問題 2 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{1/x}$ を求めよ.

問題 3 $\sin\left(\text{Tan}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ の値を求めよ.

問題 4 方程式 $\text{Cos}^{-1} x + 2 \text{Cos}^{-1} \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$ を解け.

3 演習問題 (自習用問題. 必ず解いてみること.)

1 次の極限值を求めよ. (演習書 問題 2.2.1 (1), (6), (7), (8), (9), (11), (12), (13))

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} \quad (ab \neq 0) \qquad (6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6}) - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x} \qquad (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x)}{\tan x} \qquad (9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3^x - 2^x}$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x \qquad (12) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} \qquad (13) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

• (12), (13) については, まず対数をとった関数の極限值を求めよ.

2 次の値を求めよ. (演習書 問題 2.3.1 [改題])

$$(5) \cos(\tan^{-1}(-2)) \qquad (6) \tan\left(\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$$

3 次の方程式を解け. (演習書 問題 2.3.3 [一部改題])

$$(1) \cos^{-1} x = \tan^{-1} 2 \qquad (2) \sin^{-1} x + 2 \sin^{-1} \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \tan^{-1} x + 2 \tan^{-1} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$$

4 次の関係式を示せ. (演習書 問題 2.3.4 [改題])

$$(1) \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \qquad (2) \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad (x > 0)$$

5 双曲線関数

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を示せ.

但し, $\cosh^2 x = (\cosh x)^2$, $\sinh^2 x = (\sinh x)^2$ (三角関数と同様な記法).

(2) $y = \sinh x$ および $y = \tanh x$ の逆関数をそれぞれ求めよ.

(3) $y = \cosh x$ ($x \geq 0$) および $y = \cosh x$ ($x \leq 0$) の逆関数をそれぞれ求めよ.

※ 2, 3 のような問題では, 数値として確定している部分を α などとおいてみるのがよい.

例えば, 3 (1) では, $\alpha = \tan^{-1} 2$ とおくと, α は $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ かつ $\tan \alpha = 2$ をみたし, 問題の方程式は $\cos^{-1} x = \alpha$ と表される. よって, 方程式の解 x は, 上の条件をみたす α に対する, $\cos \alpha$ の値として与えられる.