数学演習第一（演習第 1 回）【解答例】

微積：極限値, 逆三角関数 (2021 年 4 月 28 日実施)

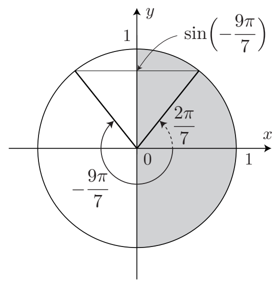
1　小テスト問題

問 1　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$ より, $(1+x+x^2)^{1/x}=(1+(x+x^2))^{\frac{1}{x+x^2}\frac{x+x^2}{x}}=\left\{(1+(x+x^2))^{\frac{1}{x+x^2}}\right\}^{1+x}\to e^1=\boxed{e}\ (x\to0)$.
あるいは, 対数をとって, $\log(1+x+x^2)^{1/x}=\dfrac{\log(1+x+x^2)}{x}=\dfrac{\log(1+(x+x^2))}{x+x^2}\dfrac{x+x^2}{x}\to1\ \ (x\to0)$ より, $(1+x+x^2)^{1/x}\to e^1=\boxed{e}\ \ (x\to0)$.

問 2　$\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}\,0$ とおけば, $\cos\alpha=0,\ 0\le\alpha\le\pi$ であるから, $\alpha=\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

問 3　$\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\Bigl(-\dfrac{1}{\sqrt3}\Bigr)$ とおけば, $\tan\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt3},\ -\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから, $\alpha=\boxed{-\dfrac{\pi}{6}}$.

問 4　$\sin\Bigl(-\dfrac{9\pi}{7}\Bigr)=\sin\Bigl(2\pi-\dfrac{9\pi}{7}\Bigr)=\sin\dfrac{5\pi}{7}=\sin\Bigl(\pi-\dfrac{5\pi}{7}\Bigr)=\sin\dfrac{2\pi}{7}$ より,
$\mathrm{Sin}^{-1}\Bigl(\sin\Bigl(-\dfrac{9\pi}{7}\Bigr)\Bigr)=\mathrm{Sin}^{-1}\Bigl(\sin\dfrac{2\pi}{7}\Bigr)=\boxed{\dfrac{2\pi}{7}}$. 右図のように考えるとよい.
【注】Sin^{-1} の定義より, $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に限り, $\mathrm{Sin}^{-1}(\sin\theta)=\theta$ が成り立つ.



2　レポート課題

問題 1　$\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\dfrac{\cos^2ax-\cos^2bx}{x^2}\dfrac{1}{\cos ax+\cos bx}=\dfrac{(1-\sin^2ax)-(1-\sin^2bx)}{x^2}\dfrac{1}{\cos ax+\cos bx}$

$$=\frac{\sin^2bx-\sin^2ax}{x^2}\frac{1}{\cos ax+\cos bx}=\left\{b^2\Bigl(\frac{\sin bx}{bx}\Bigr)^2-a^2\Bigl(\frac{\sin ax}{ax}\Bigr)^2\right\}\frac{1}{\cos ax+\cos bx}\to\boxed{\frac{b^2-a^2}{2}}\ \ (x\to0).$$

【別法】和積の公式により, $\cos ax-\cos bx=-2\sin\frac{(a+b)x}{2}\sin\frac{(a-b)x}{2}$ であるから, $a\pm b\ne0$ のとき,

$$\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=-\frac{(a+b)(a-b)}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{(a-b)x}{2}}{\frac{(a-b)x}{2}}\to-\frac{(a+b)(a-b)}{2}\ \ (x\to0).$$

$a\pm b=0$ のときは $\cos ax-\cos bx=0$ となるので, どの場合も極限値は $\boxed{-\frac{1}{2}(a+b)(a-b)}$.

問題 2　自然対数をとって考える. $\log(1+\sin2x)^{1/x}=\dfrac{\log(1+\sin2x)}{x}=\dfrac{\log(1+\sin2x)}{\sin2x}\cdot\dfrac{\sin2x}{2x}\cdot2\to2\ \ (x\to0)$ より, $(1+\sin2x)^{1/x}=e^{\log(1+\sin2x)^{1/x}}\to\boxed{e^2}\ \ (x\to0)$.

【注】関数 $f(x)^{g(x)}$ の ($x\to a$ での) 極限値を求めるためには, log をとった関数 $\log f(x)^{g(x)}=g(x)\log f(x)$ の極限値が求まればよい. 実際, log をとる操作は "e の肩に載せた表現" (ここでは $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\log f(x)}$ という変形) を与えるから, 指数関数 e^x の連続性により $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\log f(x)}$ が成り立つ.

問題 3　$\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\Bigl(-\dfrac{1}{3}\Bigr)$ とおいて, $\sin\alpha$ の値を求める. $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}\ \Bigl(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Bigr)$ であるから, $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{9}{10}$ となり, $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. よって, $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$.

問題 4　$\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{3}{4}$ とおくと, $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}>\dfrac{1}{\sqrt2}$ かつ $\mathrm{Cos}^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$. このとき, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ であるから, $0<\dfrac{\pi}{2}-2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Cos}^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-2\alpha$ は解をもち, $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt7}{4}$ より $x=\cos\Bigl(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\Bigr)=\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{\sqrt7}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\boxed{\dfrac{3\sqrt7}{8}}$ となる.

3　演習問題

1 (1) $\dfrac{\sin ax-\sin bx}{x}=a\cdot\dfrac{\sin ax}{ax}-b\cdot\dfrac{\sin bx}{bx}\to\boxed{a-b}\ \ (x\to 0)$.

【別法】$a\neq b$ では和積の公式を用いてもよい．(**問題 1** 【別法】参照)

(6) $y=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y\to 0$．このとき，$\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sin(y+\frac{\pi}{2})-1}{y}=\dfrac{\cos y-1}{y}=-\dfrac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)}=\dfrac{-\sin^2 y}{y(1+\cos y)}=\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^2\dfrac{-y}{1+\cos y}\to 1\cdot 0=\boxed{0}$.

(7) $\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}\to\boxed{\dfrac{1}{2}}\ \ (x\to 0)$.

【注】 (6), (7) の解答例では，$1-\cos x$ を $1-\cos x=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ と変形したが，半角の公式を用いて $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ と変形する方法もよく用いられる．この変形から容易に得られる極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ は基本的.

(8) $x\to 0$ のとき，$\sin x\to 0$ であるから，$\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\dfrac{\cos x}{\cos(\sin x)}\to\boxed{1}\ \ (x\to 0)$.

【別法】 $\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x\to 1$ を用いて，$\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\dfrac{\tan(\sin x)}{\sin x}\dfrac{x}{\tan x}\dfrac{\sin x}{x}\to 1$.

(9) まず，$\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\cdot\log a\ \to\ \log a\quad(x\ \to\ 0)$．これを用いて，$\dfrac{x}{3^x-2^x}=\dfrac{1}{\frac{3^x-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}}\to\boxed{\dfrac{1}{\log 3-\log 2}}\ \ (x\to 0)$.　　【別法】$\dfrac{x}{3^x-2^x}=\dfrac{1}{2^x}\dfrac{x}{(3/2)^x-1}\to\boxed{\dfrac{1}{\log(3/2)}}\ \ (x\to 0)$.

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to +0$．このとき，$\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x=y\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\dfrac{y}{\tan y}=\dfrac{y}{\sin y}\cdot\cos y\to\boxed{1}$.

(12) 自然対数をとって考える．$y=1-x$ $(x=1-y)$ とおくと，$x\to 1$ のとき $y\to 0$ であり，$\log x^{\frac{1}{1-x}}=\dfrac{\log x}{1-x}=\dfrac{\log(1-y)}{y}\to -1$．よって，$x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\log x^{\frac{1}{1-x}}}\to\boxed{e^{-1}}\ \left(=\dfrac{1}{e}\right)$.

(13) 自然対数をとって考える．$\cos x=1+(\cos x-1)$ と分解し，(7) と同様な計算を用いて ((7) の【注】も参照)，$\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}=\dfrac{\log(1+\cos x-1)}{x^2}=\dfrac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\to 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ (x\to 0)$．よって，$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}\to\boxed{e^{-1/2}}\ \left(=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

2 (5) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ とおいて，$\cos\alpha$ の値を求める．$\tan\alpha=-2\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=5$．よって，$\cos\alpha=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$.

(6) $\alpha=\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ とおいて，$\tan\alpha$ の値を求める．$\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\dfrac{15}{16}$ となり，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$．よって，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-1/4}{\sqrt{15}/4}=\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{15}}}$.

3 (1) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}2$ とおくと，$\tan\alpha=2>0$ かつ $\mathrm{Cos}^{-1}x=\alpha$．このとき，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\mathrm{Cos}^{-1}x=\alpha$ は解をもち，$x=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$ で与えられる.

(2) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}$ とおくと, $\sin\alpha = \dfrac{1}{4} > 0$ かつ $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \boxed{\dfrac{7}{8}}$ で与えられる.

(3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくと, $\tan\alpha = \dfrac{1}{5} \in (0,1)$ かつ $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{4}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha} = \dfrac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha}$ で与えられる. ここで, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{5}{12}$ であるから, $x = \dfrac{1 - \frac{5}{12}}{1 + \frac{5}{12}} = \boxed{\dfrac{7}{17}}$ となる.

【注】この種の方程式は解をもたないことがある. 例えば,

- $\mathrm{Cos}^{-1} x = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ は $\boxed{\mathbf{3}}$(1) と似ているが, 解をもたない. 実際, $\mathrm{Tan}^{-1}(-2) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ は関数 $\mathrm{Cos}^{-1} x$ の値域 $[0, \pi]$ に含まれない.
- レポート課題の $\boxed{\text{問題4}}$ に似た問題 $\mathrm{Sin}^{-1} x + 2\,\mathrm{Cos}^{-1}(-3/4) = \pi$ も解をもたない. なぜか？

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\theta = \mathrm{Sin}^{-1} x$ とおくと, $\sin\theta = x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$. このとき $x = \sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ かつ $0 \leq \dfrac{\pi}{2} - \theta \leq \pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により $\dfrac{\pi}{2} - \theta = \mathrm{Cos}^{-1} x$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x + \mathrm{Cos}^{-1} x = \theta + \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおくと, $\tan\theta = x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$. ここで, $x > 0$ より $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. このとき,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

かつ $0 < \dfrac{\pi}{2} - \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, Tan^{-1} の定義により $\dfrac{\pi}{2} - \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x} = \theta + \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

【注】 $x < 0$ のときには, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$.

(2) $X = e^x > 0$ とおけば,

- $y = \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{1}{X}\right)$ より, $X^2 - 2yX - 1 = 0$. これを X に関する 2 次方程式とみなして, $X > 0$ なる解は $X = e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. よって, $y = \sinh x$ の逆関数は $\boxed{x = \log(y + \sqrt{y^2+1})}$.
- $y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{X - X^{-1}}{X + X^{-1}} = \dfrac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$ より $X^2 = e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ (> 0). この X に関する 2 次方程式の $X > 0$ なる解は $X = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$. よって, $y = \tanh x$ の逆関数は $\boxed{x = \log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}}$ $\left(\text{あるいは}\ \boxed{x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$.

(3) $X = e^x > 0$ とおけば, $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\left(X + \dfrac{1}{X}\right) \geq 1$ となり, $X^2 - 2yX + 1 = 0$. このとき, $y \geq 1$ であるから, この X に関する 2 次方程式は実数解 $X = y \pm \sqrt{y^2-1}$ をもつ.

- $x \geq 0$ ならば, $X = e^x \geq 1$ より, $X = y + \sqrt{y^2-1}$. よって, $y = \cosh x$ $(x \geq 0)$ の逆関数は $\boxed{x = \log(y + \sqrt{y^2-1})}$.
- $x \leq 0$ ならば, $X = e^x \in (0, 1]$ より, $X = y - \sqrt{y^2-1} = \dfrac{1}{y + \sqrt{y^2-1}}$. よって, $y = \cosh x$ $(x \leq 0)$ の逆関数は $\boxed{x = -\log(y + \sqrt{y^2-1})}$ $\left(\text{あるいは}\ \boxed{x = \log(y - \sqrt{y^2-1})}\right)$.