数学演習第一（演習第 2 回）

線形：平面の方程式, 行列の演算

2021 年 5 月 12 日

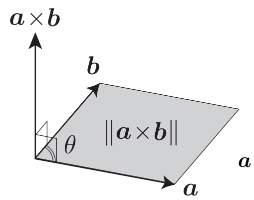
要点 1

《表記上の注意》

- 高校ではベクトルを $\overrightarrow{p}$ (矢印) の形で表したが, ここでは $\boldsymbol{p}$ (太字) と表記する. 零ベクトルは $\mathbf{0}$ で表す.
- ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して,「点 $\boldsymbol{p}$」は $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (O は原点) となる点 P を表す ($\boldsymbol{p}$ は点 P の位置ベクトル).

$\boxed{\mathrm{I}}$ 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, $\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積**, $\boldsymbol{a}$ の**長さ** (**大きさ**, **ノルム**) という. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ が成り立つ. (平面ベクトルの場合も同様.)
- $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}''$ $(\underset{\boldsymbol{a}\text{ に平行}}{\boldsymbol{b}' = k\boldsymbol{a}},\ \underset{\boldsymbol{a}\text{ に垂直}}{\boldsymbol{b}'' \cdot \boldsymbol{a} = 0})$ の形に分解できる. このとき, $\boldsymbol{b}'$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への**正射影**, $\boldsymbol{b}''$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への**正射影**と呼ぶ. (平面ベクトルの場合, $\boldsymbol{b}''$ は $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な直線」への正射影となる.)

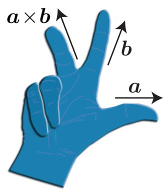


- $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の 線形 p. 8 **外積** (= **ベクトル積**) と呼ぶ.

  $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ が平行でないとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in (0, \pi)$ とすれば,

  ① $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \text{ は } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ の両方に垂直}}$,　② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は**右手系**,

  ③ $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ $= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積).

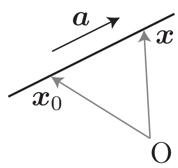


$\boxed{\mathrm{II}}$ 空間の点 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対して,

- 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**方向ベクトル**とする直線 ($\boldsymbol{a}$ に平行な直線) の方程式は, 線形 p. 11

$$\underset{\text{(ベクトル方程式)}}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \quad \text{より,} \quad \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

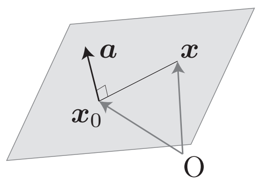
  (右上の表現は $abc \neq 0$ の場合の形. 例えば $ab \neq 0, c = 0$ なら, $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}, z = z_0$ となる.)



- 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**法線ベクトル**とする平面 ($\boldsymbol{a}$ に垂直な平面) の方程式は, 線形 p. 12

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0, \quad \text{すなわち} \quad \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

  (右上の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)



要点 2

- $l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B に対して, $l \times n$ 行列 AB (A, B の積) が次により定義される: AB の (i, j) 成分は A の第 i 行と B の第 j 列の “内積” である. また, B の (i, j) 成分を (j, i) 成分とする $n \times m$ 行列を B の**転置行列**と呼び, ${}^{\mathrm{t}}B$ で表す.
- 同じサイズの正方行列 A, B に対して, 積 AB, BA が定義されるが, 数の場合と異なり,「$AB = BA$」「$AB = O \Rightarrow A = O$ or $B = O$」が成り立つとは限らない.
- 正方行列 A に対して, $AB = BA = E$ を満たす B が存在するとき (存在すれば一意), B を A の**逆行列**と呼び, A^{-1} で表す. また, 逆行列をもつ行列を**正則行列**という. 2 次正方行列の場合は

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ が正則} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0. \quad \text{このとき, } A \text{ の逆行列は } \boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}.$$

1　小テスト問題（オンライン受験）

問 1　$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ を計算せよ.

〈選択肢: A. $\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$〉

問 2　次の平面のうちで直線 $x-3=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{4}$ と平行なものをすべて選べ.

〈選択肢: A. $3x-2y+z=0$　B. $2x+y-z=0$　C. $2x+3y-2z=0$　D. $x+2y+4z=0$〉

問 3　$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&-2&3\end{bmatrix}$ に対して積 ${}^tAA$ を計算したとき, 次の数の中で ${}^tAA$ の成分となるものをすべて選べ.

〈選択肢: A. 3　B. 4　C. 5　D. 6〉

問 4　$\begin{bmatrix}-\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

〈選択肢: A. $\begin{bmatrix}-\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$　B. $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$　C. $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$　D. $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$〉

2　レポート課題（オンライン提出）

答だけでなく考え方 (計算過程) も問うています.
答案を A4 用紙 1〜2 枚程度にまとめ, pdf 書類に変換して提出して下さい.

問題 1　2 直線 $\dfrac{x+4}{5}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$, $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ が交点をもつことを示し, この 2 直線を含む平面の方程式を求めよ. (ヒント: 2 直線上の点はそれぞれ $(5s-4,-4s+5,3s-1)$, $(2t+3,3t+4,-t+1)$ の形に書ける. また, 求める平面の法線ベクトルは 2 直線に垂直である.)

問題 2　$A=\begin{bmatrix}1&2\\-2&0\\2&-5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}$ のとき, ${}^t(3X-A)=2B$ を満たす行列 X を求めよ.

問題 3　3 つの行列 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\\1&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0&1&-3\\1&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ を (3 つの行列の) 積が定義されるような順に並べ, その積を計算せよ. (ヒント: 3 通りの並べ方がある.)

問題 4　$A=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&-5\\-6&7\end{bmatrix}$ のとき, 2 次正則行列の逆行列の公式を利用して, $XA=AB$ を満たす行列 X を求めよ.

3　演習問題　(自習用問題. 必ず解いてみよう.)

1　ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ に対して, 以下を計算せよ. ((4), (5) については線形第 1 節参照)

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角　(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　(4) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺の面積 $(=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|)$
(5) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $(=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|)$　(6) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る四面体の体積

$\boxed{\mathbf{2}}$ 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, かつ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は平行でない) に対して, 次の主張を示せ.

(i) $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影は $\boldsymbol{b}' = \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, その長さは $\|\boldsymbol{b}'\| = \dfrac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

(ii) $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への正射影は $\boldsymbol{b}'' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, その長さは $\|\boldsymbol{b}''\| = \dfrac{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$.

更に, $\boxed{\mathbf{1}}$ の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して, 以下を計算せよ.

(7) $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影　　(8) $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面」への正射影

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間の 3 点 $\mathrm{A}(1, 0, 2)$, $\mathrm{B}(2, -3, 0)$, $\mathrm{C}(-1, 2, 1)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 2 点 A, B を通る直線 (直線 AB と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が方向ベクトル)

(2) 3 点 A, B, C を通る平面 (平面 ABC と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が法線ベクトル)

(3) 原点 O から平面 ABC に下ろした垂線の長さを求めよ.

(4) 点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さを求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ.

(1) $2A - 3B$　　(2) $3X + 2A = B$ を満たす行列 X　　(3) AC　　(4) $B\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}A$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の正則性, 逆行列について考える.

(1) $(A - aE)(A - dE)$ (E は 2 次単位行列) を計算して, 次の関係式を導け:

$$\boxed{A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O}.$$

(2) $\widetilde{A} := (a+d)E - A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおくとき, (1) の関係式から, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad - bc)E$ を導け.

(3) (2) の関係式を用いて, 次の主張を示せ.

① $ad - bc \neq 0$ ならば, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\widetilde{A} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

② $ad - bc = 0$ ならば, A は正則でない.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, 次の問いに答えよ.

(1) 次の行列の逆行列を求めよ: ① $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$,　② $\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ $(r \neq 0)$.

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ のとき, $AXA = B$ を満たす行列 X を求めよ.

$\boxed{\mathbf{7}}$ 行列 A が $A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ (A_{11} は r 次正方行列, A_{22} は s 次正方行列) と分割されているとする.

(1) $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$ が A と同じ形の分割であるとき, 積 AX を分割された形で計算せよ.

(2) A_{11}, A_{22} が正則ならば, A も正則となることを示し, A の逆行列を A_{11}, A_{21}, A_{22} を用いて表せ.

$\boxed{\mathbf{8}}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{p}_1 = \lambda\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2 = \mu\boldsymbol{p}_2$, $A\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2 + \mu\boldsymbol{p}_3$ を満たす実数 λ, μ を求めよ.

(2) 3 次の正方行列 P を $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix}$ (列ベクトル分割した形) で定める. このとき, $AP = PB$ を満たす 3 次正方行列 B を答えよ.