数学演習第一（演習第 2 回）【解答例】

線形：平面の方程式, 行列の演算 (2021 年 5 月 12 日実施)

1 小テスト問題

問 1 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}}$. (正解は B)

問 2 直線 $x-3=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{4}$ の方向ベクトルは $\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$. この直線が与えられた平面と平行になるためには, 平面の法線ベクトルと $\boldsymbol{d}$ が垂直 (内積が 0) となればよい. 4 つの平面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}_{\mathsf{A}}=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{n}_{\mathsf{B}}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{n}_{\mathsf{C}}=\begin{bmatrix}2\\3\\-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{n}_{\mathsf{D}}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{d}$ との内積をとれば, $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathsf{A}}=3$, $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathsf{B}}=0$, $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathsf{C}}=0$, $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathsf{D}}=21$. (正解は B, C)

問 3 ${}^{\mathrm{t}}\!AA=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&-2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-4&3\\-4&5&-6\\3&-6&9\end{bmatrix}$. (正解は A, C)

問 4 2 次正則行列の逆行列の公式 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ $(ad-bc\neq 0)$ を用いて,

$$\begin{bmatrix}-\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\-\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}}.\quad(\text{正解は A}).$$

2 レポート課題

問題 1 与えられた 2 直線上の点はそれぞれ $(5s-4,-4s+5,3s-1)$, $(2t+3,3t+4,-t+1)$ と書ける. 交点があるとすれば, その点で $(5s-4,-4s+5,3s-1)=(2t+3,3t+4,-t+1)$ が成り立つが, この等式は $s=1$, $t=-1$ で満たされるので, 点 $\boxed{(1,1,2)}$ が交点である. 一方, 2 直線はそれぞれ $\begin{bmatrix}5\\-4\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$ に平行であるから, この 2 直線に垂直なベクトルとして $\begin{bmatrix}5\\-4\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\11\\23\end{bmatrix}$ を得る. よって, 求める平面は点 $(1,1,2)$ を通り, $\begin{bmatrix}-5\\11\\23\end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, その方程式は $-5(x-1)+11(y-1)+23(z-2)=0$, すなわち $\boxed{-5x+11y+23z=52}$.

問題 2 ${}^{\mathrm{t}}(3X-A)=2B$ より, $3X-A={}^{\mathrm{t}}(2B)=2\,{}^{\mathrm{t}}B$. よって,

$$X=\frac{1}{3}(2\,{}^{\mathrm{t}}B+A)=\frac{1}{3}\left(2\begin{bmatrix}-2&2\\1&3\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\-2&0\\2&-5\end{bmatrix}\right)=\boxed{\begin{bmatrix}-1&2\\0&2\\2&-1\end{bmatrix}}.$$

問題 3 行列 A,B,C のサイズはそれぞれ 2×3, 3×2, 3×3 であるから, 3 つの行列の積が定義できるのは ACB, CBA, BAC の 3 通り. それぞれの積を計算すると,

$$ACB=\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-3\\1&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\-1&2&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\\1&0\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-2&1\\-9&1\end{bmatrix}},$$

$$CBA=\begin{bmatrix}0&1&-3\\1&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1\\2&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}2&4&-1\\-2&-2&1\\2&-1&-1\end{bmatrix}},$$

$$BAC=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-3\\1&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\2&1&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-3\\1&-2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}-1&2&-7\\0&0&-7\\-1&2&0\end{bmatrix}}.$$

問題4 $XA = AB$ の両辺の右側から A の逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ を掛けることにより,

$$X = ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 14 & -17 \\ -36 & 43 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}}.$$

3 演習問題

1 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 8+2-1 = \boxed{9}$. (2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1-2 \\ 2+4 \\ 8-2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}}$.

(3) なす角を $\theta \in [0,\pi]$ とすれば, $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{9}{\sqrt{16+1+1}\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. よって, $\theta = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$.

(4) ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積) $= \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \sqrt{9+36+36} = \boxed{9}$.

(5) ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積) $= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = |-3-12+18| = \boxed{3}$.

(6) 四面体の体積は平行六面体の体積に対して, 底面の面積は半分で, 更に錐となっているので体積は 1/6 となる.

($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る四面体の体積) $= \dfrac{1}{6}$ ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積) $= \dfrac{1}{6}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

2 (i) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}'' = k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}''$ と $\boldsymbol{a}$ との内積をとれば, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = k\|\boldsymbol{a}\|^2$. よって, $k = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})/\|\boldsymbol{a}\|^2$ となり,

$$\boldsymbol{b}' = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = (\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}, \quad \|\boldsymbol{b}'\| = \frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \|\boldsymbol{b}\||\cos\theta| \quad (\theta \in (0,\pi) \text{ は } \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \text{ のなす角}).$$

(ii) (i) の結果より, $\boldsymbol{b}'' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'' = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$. また, $\boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}'', \boldsymbol{b}$ は直角三角形の 3 辺に重なるから,

$$\|\boldsymbol{b}''\| = \sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{b}'\|^2} = \sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2\cos^2\theta} = \|\boldsymbol{b}\|\sin\theta = \frac{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}.$$

次に, **1** の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ に対して,

(7) $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = 4-2+3 = 5$, $\|\boldsymbol{a}\|^2 = 16+1+1 = 18$ より, $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \boxed{\dfrac{5}{18}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$.

(8) まず, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ を見て, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に平行な平面の法線ベクトルとして $\boldsymbol{n} := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ をとる. $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{n}$ に平行な直線」への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} = \left(\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. よって, $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に平行な平面」への正射影は $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{\dfrac{5}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}}$.

3 (1) 直線 AB は点 A$(1,0,2)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, 方程式は $\boxed{x-1 = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-2}{-2}}$.

(2) 平面 ABC は点 A$(1,0,2)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, 方程式は $7(x-1)+5y-4(z-2) = 0$. これを整理して, $\boxed{7x+5y-4z+1=0}$.

(3) 原点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすとき, 直線 OH は原点 O を通り, 平面 ABC の法線ベクトル $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, H$(7t,\ 5t,\ -4t)$ と書ける. 更に, H は平面 ABC 上の点であるから, $7\cdot 7t + 5\cdot 5t - 4\cdot(-4t) + 1 = 0$ を満たす. これを解いて $t = -\dfrac{1}{90}$ となり, H の座標は $\left(-\dfrac{7}{90}, -\dfrac{1}{18}, \dfrac{2}{45}\right)$

で, 垂線の長さは $\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\| = \dfrac{\sqrt{49+25+16}}{90} = \boxed{\dfrac{1}{3\sqrt{10}}}$.

【別法】 求める垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の「平面 ABC の法線」($\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行) への正射影の長さに他ならない. よって, $\boxed{\mathbf{2}}$ (i) を用いて, (垂線の長さ) $= \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}})|}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{90}} = \boxed{\dfrac{1}{3\sqrt{10}}}$.

【補足】 一般に, 点 (x_1, y_1, z_1) から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の長さは $\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ で与えられる. この事実を示そう. 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ とし, 平面 $ax+by+cz+d=0$ 上に点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ をとる. このとき, 垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ の平面 $ax+by+cz+d=0$ の法線 ($\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする) への正射影の長さに他ならない. このとき, $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ であるから, $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \cdot \boldsymbol{n}$ は

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0) = (ax_1+by_1+cz_1)-(ax_0+by_0+cz_0) = ax_1+by_1+cz_1+d$$

と計算される. よって, 求める垂線の長さは $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(4) 点 C から直線 AB に垂線 CK を下ろすとき, 点 K は直線 AB 上の点であるから, $\mathrm{K}(t+1, -3t, -2t+2)$ と書ける. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \begin{bmatrix} t+2 \\ -3t-2 \\ -2t+1 \end{bmatrix}$ と直線 AB は垂直ゆえ, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t+2 \\ -3t-2 \\ -2t+1 \end{bmatrix} = t+2-3(-3t-2)-2(-2t+1) = 0$. これより $t = -\dfrac{3}{7}$ が得られ, 点 K の座標は $\left(\dfrac{4}{7}, \dfrac{9}{7}, \dfrac{20}{7}\right)$. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 13 \end{bmatrix}$ であるから, 垂線の長さは $\|\overrightarrow{\mathrm{CK}}\| = \dfrac{\sqrt{121+25+169}}{7} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{35}}{7}}$.

【別法】 求める垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の「直線 AB に垂直な平面」への正射影の長さに他ならない. よって, $\boxed{\mathbf{2}}$ (ii) を用いて, (垂線の長さ) $= \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|} = \dfrac{\sqrt{90}}{\sqrt{14}} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{35}}{7}}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $2A-3B = \boxed{\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -5 & -9 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}}$. (2) $X = \dfrac{1}{3}(B-2A) = \dfrac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right\} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$.

(3) $AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}}$.

(4) $B\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}A = B\,{}^{\mathrm{t}}(AC) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 6 & -20 \\ 7 & 1 & -10 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $(A-aE)(A-dE) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = bcE$. 左辺を展開すれば $A^2-(a+d)A+adE$ であるから, 確かに $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E = O$ が成り立つ.

(2) (1) の関係式より, $(ad-bc)E = (a+d)A - A^2 = A((a+d)E-A) = ((a+d)E-A)A$. よって, $\widetilde{A} = (a+d)E - A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおけば, 確かに $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad-bc)E$ が成り立つ.

(3) ① $ad-bc \neq 0$ ならば, (2) の関係式の両辺を $ad-bc \neq 0$ で割り, $A\left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right) = \left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right)A = E$. 定義により $\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}$ は A の逆行列である (A は正則): $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

② $ad-bc = 0$ ならば $A\widetilde{A} = O$ となるが, このとき A が逆行列 A^{-1} をもつ (= 正則) と仮定すれば, $\widetilde{A} = (A^{-1}A)\widetilde{A} = A^{-1}(A\widetilde{A}) = A^{-1}O = O$ となり, $A = O$ が従う (成分に注目). ところが, $A = O$ はどんな 2 次正方行列を掛けても O となるので, A が逆行列をもつという仮定に矛盾する.

6 (1) 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, ① $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}}$,

② $\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{r}\begin{bmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}}$.

(2) $AXA = B$ の両辺の両側から A^{-1} を掛けて,

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 3 \\ 5 & 7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 \\ 5 & 7\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-7 & 3 \\ 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3 \\ 5 & -2\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}-24 & 10 \\ 17 & -7\end{bmatrix}}.$$

7 (1) $A = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} r & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} & \begin{bmatrix}A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\end{array}$, $X = \begin{array}{c c} & \begin{matrix} r & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} & \begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}\end{array}$ と分割されているから,

$$AX = \begin{bmatrix}A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}A_{11}X_{11} & A_{11}X_{12} \\ A_{21}X_{11} + A_{22}X_{21} & A_{21}X_{12} + A_{22}X_{22}\end{bmatrix}}.$$

(2) $AX = E$ だとすれば, $A_{11}X_{11} = E_r$, $A_{11}X_{12} = O$, $A_{21}X_{11} + A_{22}X_{21} = O$, $A_{21}X_{12} + A_{22}X_{22} = E_s$. ここで, A_{11}, A_{22} が正則であるから, $X_{11} = A_{11}^{-1}$, $X_{12} = O$, $X_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$, $X_{22} = A_{22}^{-1}$. このとき, $XA = E$ が成り立つことも容易に確かめられる. よって, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}}$.

8 (1) $A\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix}-1 \\ 0 \\ -1\end{bmatrix} = -\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix}2 \\ 2 \\ 2\end{bmatrix} = 2\boldsymbol{p}_2$, $A\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix}5 \\ 5 \\ 3\end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_2 + 2\boldsymbol{p}_3$ より, $\lambda = \boxed{-1}$, $\mu = \boxed{2}$.

(2) (1) の結果を用いて,

$$AP = \begin{bmatrix}A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & A\boldsymbol{p}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\boldsymbol{p}_1 & 2\boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_2 + 2\boldsymbol{p}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

よって, B として $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ がとれる. (実は, P は正則であり, $B = P^{-1}AP$ が成り立つ.)