数学演習第一（演習第 3 回）【解答例】

微積：合成関数の微分法, 逆関数の微分法等 (2021 年 5 月 12 日実施)

1 小テスト問題

問 1 $\alpha = \log 2$ とおけば $e^\alpha = 2$ であるから，$\tanh(\log 2) = \tanh\alpha = \dfrac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$. (正解は D)

問 2 与えられた関数のグラフはどれも明らかに原点を通る．$x=0$ での微分係数が 1 であるかを調べる．

- $f_1(x) := \mathrm{Sin}^{-1}\,x$ は $[-1,1]$ で定義され, $(-1,1)$ で微分可能. $f_1'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より, $f_1'(0) = 1$.
- $f_2(x) := \mathrm{Tan}^{-1}\,x$ は $\mathbb{R}$ で定義され, 微分可能. $f_2'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ より, $f_2'(0) = 1$.
- $f_3(x) := \sinh x$ は $\mathbb{R}$ で定義され, 微分可能. $f_3'(x) = \cosh x$ より, $f_3'(0) = 1$.
- $f_4(x) := \tanh x$ は $\mathbb{R}$ で定義され, 微分可能. $f_4'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ より, $f_4'(0) = 1$.
- $f_5(x) := \log(x + \sqrt{x^2+1}\,)$ は $\mathbb{R}$ で定義され, 微分可能. $f_5'(x) = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ より, $f_5'(0) = 1$.
- $f_6(x) := \log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\{\log(1-x) - \log(1+x)\}$ は $(-1,1)$ で定義され, 微分可能. $f_6'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{1}{x^2-1}$ より, $f_6'(0) = -1$. なお，$\varphi(x) := \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = -f_6(x)$ を考えれば, $\varphi'(0) = 1$.

(正解は C)

問 3 与えられた関数の導関数を計算する．

- $g_1(x) := \mathrm{Sin}^{-1}\,x$ は $[-1,1]$ で定義され, $(-1,1)$ で微分可能. $g_1'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\to$ ◯
- $g_2(x) := \mathrm{Cos}^{-1}\,x$ は $[-1,1]$ で定義され, $(-1,1)$ で微分可能. $g_2'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\to \times$
- $g_3(x) := \log(x + \sqrt{x^2+1}\,)$ は $\mathbb{R}$ で定義され, 微分可能. $g_3'(x) = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. $\to$ ◯
- $g_4(x) := \log(\sqrt{x^2+1} - x) = g_3(-x)$ は $\mathbb{R}$ で定義され, 微分可能. $g_4'(x) = -g_3'(-x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. $\to \times$
- $g_5(x) := \log(x+\sqrt{x^2-1}\,)$ は $[1,\infty)$ で定義され, $(1,\infty)$ で微分可能. $g_5'(x) = \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. $\to$ ◯
- $g_6(x) := \log(\sqrt{x^2-1} - x) = g_5(-x)$ は $(-\infty,-1]$ で定義され, $(-\infty,-1)$ で微分可能. $g_6'(x) = -g_5'(-x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. $\to \times$

(正解は A)

問 4 $x = f(y) := y^3 + 2y + 1$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体で, $f'(y) = 3y^2 + 2 > 0$ ($f(y)$ は y の単調増加関数) であるから, 逆関数 $y = f^{-1}(x) = g(x)$ ($\mathbb{R}$ 全体が定義域) が存在する．$x = 1$ に対応する y の値は $y^3+2y+1 = 1$ ($\Leftrightarrow y(y^2+2) = 0$) を解いて $y = 0$. よって, $g'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$. ($\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \dfrac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=0}}$ を計算している.) (正解は B)

2 レポート課題

(1) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義され, $x \neq 0, -1$ で微分可能. 合成関数の微分法により,

$$f'(x) = \frac{\{(x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\}'}{(x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} - (x+1)^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \boxed{-\frac{x^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}}} = \boxed{-\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1}}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(x+1)^2}}} = \boxed{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+1}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\right)}.$$

(2) まず，$f(x)$ が定義されるためには $(1-x^n)/(1+x^n)\geq 0$, 従って $f(x)$ の定義域は自然数 n が奇数なら $-1<x\leq 1$, 偶数なら $-1\leq x\leq 1$ であり，どちらの場合も $-1<x<1$ で微分可能となる．$-1<x<1$ のとき，$\log f(x)=(1/2)\{\log(1-x^n)-\log(1+x^n)\}$ であるから，この両辺を x で微分して，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\Big(-\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}-\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\Big)=-\frac{nx^{n-1}}{2}\cdot\frac{(1+x^n)+(1-x^n)}{(1+x^n)(1-x^n)}=-\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)(1-x^n)}.$$

$$\therefore\ f'(x)=-\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)(1-x^n)}\sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}}=\boxed{-\frac{nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^n}\sqrt{(1+x^n)^3}}}=\boxed{-\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)\sqrt{1-x^{2n}}}}.$$

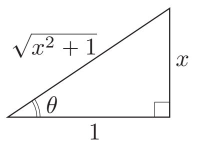
あるいは直接微分して，

$$f'(x)=\left\{\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}'=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-x^n}{1+x^n}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^n}{1-x^n}}\cdot\frac{-2nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}=\boxed{-\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)\sqrt{1-x^{2n}}}}.$$

(3) $$\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-x\cdot\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\boxed{\frac{1}{x^2+1}}.$$

《注》結果を不思議に思うかもしれないが，$\boxed{\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\mathrm{Tan}^{-1}x}$ が成り立つので当然である．この関係式は次のように示される：$\theta=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ とおけば，$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\in(-1,1)$, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=x$ となるから，θ の表現として枠内の関係式が得られる． 実は，更に

$$\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\mathrm{Tan}^{-1}x=\pm\,\mathrm{Cos}^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\quad(\pm x\geq 0)$$



が成り立つ (複号同順)．この式は $x\geq 0$ の場合は上の計算から直ちに従う (右図を見れば一目瞭然)．$x\leq 0$ の場合は x を $-x$ で置き換え，Sin^{-1}, Tan^{-1} が奇関数であることに注意すればよい．

(4) $$\{\mathrm{Tan}^{-1}(\sinh x)\}'=\frac{(\sinh x)'}{1+\sinh^2 x}=\frac{\cosh x}{\cosh^2 x}=\boxed{\frac{1}{\cosh x}}.$$

3 演習問題

1 (1) 合成関数の微分法により，$f'(x)=a^{x^2+2x}\log a\cdot(x^2+2x)'=\boxed{2(x+1)a^{x^2+2x}\log a}$.

(2) $f(x)$ の定義域は $x>e$ である．合成関数の微分法により，

$$f'(x)=\frac{(\log(\log x))'}{\log(\log x)}=\frac{1}{\log(\log x)}\cdot\frac{(\log x)'}{\log x}=\boxed{\frac{1}{x\log x\ \log(\log x)}}.$$

(3) まず，$g(x)=x^x$ とおけば，$\log g(x)=x\log x$ より，

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1,\quad g'(x)=x^x(\log x+1).$$

(あるいは，$g'(x)=(e^{x\log x})'=e^{x\log x}\cdot(x\log x)'=x^x(\log x+1)$ と計算することもできる.)　よって，$f(x)=x^{g(x)}$, $\log f(x)=g(x)\log x$ より，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=g'(x)\log x+\frac{g(x)}{x}=x^x(\log x+1)\log x+x^{x-1},\quad f'(x)=\boxed{x^{x^x}\left\{x^x(\log x+1)\log x+x^{x-1}\right\}}.$$

(4) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ と合成関数の微分法により，$f'(x)=\frac{(x+2\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}=\boxed{\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}$.

(5) $\log|f(x)|=\log\left|\frac{(x+1)^2}{(x-2)^3(x+3)^4}\right|=2\log|x+1|-3\log|x-2|-4\log|x+3|$ を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+3}=-\frac{5x^2+6x+13}{(x+1)(x-2)(x+3)}.$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-2)^3(x+3)^4}\cdot\frac{-(5x^2+6x+13)}{(x+1)(x-2)(x+3)}=\boxed{-\frac{(x+1)(5x^2+6x+13)}{(x-2)^4(x+3)^5}}.$$

《注》 有理式 $f(x)=\frac{(多項式)}{(多項式)}$ に対して，関数 $\log|f(x)|$ は $f(x)$ の分母の零点だけでなく，分子の零点でも定義されない．

しかし, 対数微分法 ($\log|f(x)|$ を x で微分する方法) の結果として得られる $f'(x)$ は $f(x)$ の (分子の) 零点においても微分可能となる. 実際, 商の微分公式から, 有理式は分母の零点以外では計算しなくても微分可能であることが保証されているからである. 従って, 対数微分法を用いるとき, $f(x)$ の零点で $\log|f(x)|$ が定義されないことは気にする必要はない.

(6) まず, $f(x)$ の分子・分母に $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}$ を掛けて,

$$f(x)=\frac{(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}\,)^2}{(a^2+x^2)-(a^2-x^2)}=\frac{a^2}{x^2}+\frac{\sqrt{a^4-x^4}}{x^2}\,.$$

これを x で微分すると,

$$f'(x)=-\frac{2a^2}{x^3}+\left(\frac{-2x^3}{\sqrt{a^4-x^4}}\cdot\frac{1}{x^2}+\sqrt{a^4-x^4}\cdot\frac{-2}{x^3}\right)=\boxed{-\frac{2a^2}{x^3}\left(1+\frac{a^2}{\sqrt{a^4-x^4}}\right)}.$$

(7) $\log f(x)=(\cos x)\log(\sin x)$ より, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=(-\sin x)\cdot\log(\sin x)+\cos x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$. よって,

$$f'(x)=f(x)(\log f(x))'=\boxed{(\sin x)^{\cos x}\left\{\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ \log(\sin x)\right\}}.$$

2 (1) $y=\mathrm{Sin}^{-1}x$ とおけば, $x=\sin y\ \left(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-x^2}$ より, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

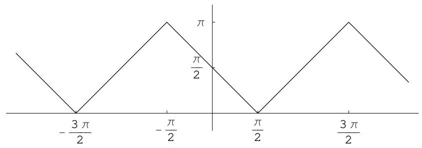
(2) $y=\mathrm{Cos}^{-1}x$ とおけば, $x=\cos y\ (0\le y\le\pi)$, $\dfrac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-x^2}$ より, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば, $x=\tan y\ \left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$, $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+x^2$ より, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

3 (1) $f'(x)=2\,\mathrm{Sin}^{-1}x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\boxed{\dfrac{2\,\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}$. (2) $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}=\boxed{\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}$.

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{1+(1-x)}\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\boxed{\dfrac{1}{2(x-2)\sqrt{1-x}}}$.

(4) $f'(x)=-\dfrac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\boxed{-\dfrac{\cos x}{|\cos x|}}=\boxed{\begin{cases}-1 & (\cos x>0)\\ 1 & (\cos x<0)\end{cases}}$.



《注》 上の事実と $\mathrm{Cos}^{-1}(\sin n\pi)=\mathrm{Cos}^{-1}0=\dfrac{\pi}{2}\ \ (n\in\mathbb{Z})$

より, $y=\mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$ ($\mathbb{R}$ 上で連続) のグラフは右の通り.

(5) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{-1/x^2}{1+(1/x)^2}=\boxed{0}$. ($f(x)$ は $x\ne0$ で定義され, 微分可能.)

《注》 $\mathrm{Tan}^{-1}(\pm1)=\pm\dfrac{\pi}{4}$ であるから上と合わせて, $f(x)=\pm\dfrac{\pi}{2}\ (x\gtrless0)$ (複号同順).

4 双曲線関数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ については微積教科書 p.19 参照. 特に, 次の性質は重要 (三角関数の場合と比較せよ):

$$(\sinh x)'=\cosh x,\quad (\cosh x)'=\sinh x,\quad \cosh^2 x-\sinh^2 x=1.$$

これらの性質は定義を用いて容易に確認できる (see **要点**).

(1) まず, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\sinh x=\pm\infty$ (複号同順) と中間値の定理により, $y=\sinh x$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体. また, $\dfrac{dy}{dx}=\cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}=\sqrt{1+y^2}$ である. $\dfrac{dy}{dx}>0$ と $y=\sinh x$ の全射性により, $y=\sinh x$ の逆関数は $\mathbb{R}$ 全体で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. 従って, $\boxed{(\sinh^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

【別解】 $e^{2x}-2ye^x-1=0$ により $x=\log(y+\sqrt{1+y^2})$ と具体的な形を求めることができる. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(2) $y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ は, 偶関数で, $x \geq 0$ において $y \geq 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cosh x=\infty$ の単調増加関数である. また, $\dfrac{dy}{dx}=\sinh x=\sqrt{\cosh^2 x-1}=\sqrt{y^2-1}$ である. $\dfrac{dy}{dx}>0$ により, $y=\cosh x$ $(x\geq 0)$ の逆関数は $y\geq 1$ で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. 従って, $\boxed{(\cosh^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$ $(x>1)$.

【別解】 $e^{2x}-2ye^x+1=0$ $(x\geq 0)$ により $x=\log(y+\sqrt{y^2-1})$ と具体的な形を求めることができる. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

(3) まず, $\tanh x=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より, $y=\tanh x$ の値域は $-1<y<1$ である. また, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}=1-\tanh^2 x=1-y^2$ である. これにより $\dfrac{dy}{dx}>0$ であることがわかり, $y=\tanh x$ の逆関数は $-1<y<1$ で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{1-y^2}$. 従って, $\boxed{(\tanh^{-1}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}}$.

【別解】 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\ \Leftrightarrow\ e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}$ に注意する. $e^{2x}>0$ なので, この等式を満たす $x\in\mathbb{R}$ が存在するための条件は $-1<y<1$ であり, このとき $x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}\left(=\log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$ を得る. よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\{\log(1+y)-\log(1-y)\}=\frac{1}{1-y^2}\quad(-1<y<1).$$

《注》 $\sinh x$, $\tanh x$ はともに $\mathbb{R}$ 上で単調増加であるから, (実数値関数を考える限りは) 逆関数 $\sinh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$ の表記に曖昧さはない. 一方, $\cosh x$ では定義域を $x\geq 0$, $x\leq 0$ に制限して得られる 2 通りの逆関数が考えられ, 通常は $\cosh x$ $(x\geq 0)$ の逆関数に対して $\cosh^{-1}x$ を割り当てる. 曖昧さをなくすために, $\sinh^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$ の代わりに $\mathrm{Sinh}^{-1}x$, $\mathrm{Cosh}^{-1}x$, $\mathrm{Tanh}^{-1}x$ という記号を用いることもある (微積教科書 p.31 の 3 を参照):

$$\mathrm{Sinh}^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1}),\quad \mathrm{Cosh}^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2-1}),\quad \mathrm{Tanh}^{-1}x=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

実は, 複素数値関数としては $\sinh x$, $\tanh x$ でも x の範囲を制限しないと逆関数が一意に定まらない (詳細は省略) ので, 複素数値の場合も考慮して, 上の形の "標準的な" 逆関数を $\mathrm{Sinh}^{-1}x$, $\mathrm{Cosh}^{-1}x$, $\mathrm{Tanh}^{-1}x$ と表そうという訳である.

5 (1) $(\tanh^{-1}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$ を用いて, $\{\tanh^{-1}(\sin x)\}'=\dfrac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}=\boxed{\dfrac{1}{\cos x}}$.

(2) $(\sinh^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を用いて,

$$\left(\sinh^{-1}\sqrt{x-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+(x-\frac{1}{2})}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}}.$$