数学演習第一（演習第 5 回）

微積：極値, 関数の増減, ロピタルの定理

2021 年 6 月 2 日

要点 1

極値 (微積教科書 p.32 参照)

- 関数 $f(x)$ が $x = c$ で極大であるとは, c を含む開区間 J が存在し,
$$f(x) < f(c) \qquad (x \in J,\ x \neq c)$$
を満たすことをいう．すなわち, $f(x)$ を J に制限すると, J では $f(x)$ は $x = c$ でのみ最大値をとる．このとき, $f(c)$ を c における $f(x)$ の極大値という．
- 関数 $f(x)$ が $x = c$ で極小であるとは, c を含む開区間 J が存在し,
$$f(x) > f(c) \qquad (x \in J, x \neq c)$$
を満たすことをいう．すなわち, $f(x)$ を J に制限すると, J では $f(x)$ は $x = c$ でのみ最小値をとる．このとき, $f(c)$ を c における $f(x)$ の極小値という．
- 極大値および極小値を合わせて極値という．

要点 2

関数の増減 (微積教科書 p.34 定理 2.2.5)

(1) 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続であり, (a, b) で微分可能なとき,
$$f'(x) > 0\ (a < x < b) \text{ ならば } f(a) < f(b) \text{ であり,}$$
$$f'(x) < 0\ (a < x < b) \text{ ならば } f(a) > f(b) \text{ である.}$$

(2) 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能とする．$f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は単調増加であり, $f'(x) < 0$ ならば単調減少である．

要点 3

ロピタルの定理 (微積教科書 p.36 定理 2.2.7)

$f(x), g(x)$ は $x = a$ の近くで (a を除いて) 定義されていて, 微分可能とする．このとき,

$$\left.\begin{array}{rl} \text{(i)} & \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ または } \infty, \\ \text{(ii)} & a \text{ の近くで } g'(x) \neq 0, \\ \text{(iii)} & \displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在する } (\pm\infty \text{ でも可}) \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【注意】

- 便宜上, (i) の極限 0 の場合を $\frac{0}{0}$ 型の不定形, 極限 ∞ の場合を $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形と呼ぶ.
- $x \to a$ を $x \to a + 0$ (右極限), $x \to a - 0$ (左極限), あるいは $x \to \infty$, $x \to -\infty$ (無限遠での極限) に置き換えても定理は成り立つ．但し, 条件の中の "a の近くで" は次のように読み替える必要がある: 例えば, $x \to a + 0$ の場合なら "a の右側の近くで", $x \to \infty$ の場合なら "十分に大きい数以上で" と読み替える.
- (i) の極限 ∞ の場合は, $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ のそれぞれが $\infty, -\infty$ のいずれかであると読み替えてよい.
- (ii) の条件は教科書には書かれていないが, この条件が必要な理由が $\boxed{5}$ に示されている.

1　小テスト問題（オンライン受験）

問 1　関数 $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\, x + 2\,|x|$ について, 次の記述で正しいものをすべて選べ.

〈選択肢:
A.　$f(x)$ は極小値をとる.
B.　$f(x)$ は極大値をとる.
C.　$f(x)$ は極小値をとらない.
D.　$f(x)$ は極大値をとらない.〉

問 2　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$ を求めよ. (必要ならロピタルの定理を繰り返して用いよ)

〈選択肢:　A.　0　　B.　1/6　　C.　1/2　　D.　1〉

問 3　$\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ を求めよ. (ロピタルの定理は適用できるか)

〈選択肢:　A.　0　　B.　1　　C.　∞　　D.　存在しない〉

問 4　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x\log x)^{\frac{1}{\log x}}$ を求めよ. (対数をとって考える)

〈選択肢:　A.　0　　B.　1　　C.　e　　D.　∞〉

2　レポート課題（オンライン提出）

答だけでなく考え方 (計算過程) も書いて下さい.

問題 1　関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$ のすべての極値と各極値を与える x の値を求めよ.

問題 2　関数 $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \mathrm{Tan}^{-1}\, x$ $(x \geqslant 0)$ の増減を調べよ.

問題 3　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ を求めよ.

ヒント: 通分して $\frac{0}{0}$ 型の不定形に変形することから始める. 一般に, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A$ (0 でない有限値) ならば, $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x) = A \lim_{x\to a} g(x)$ が成り立つから, 0 以外の有限値に収束することが分かっている部分を引きはがすことより, 極限の計算を単純化することができる.

問題 4　$\alpha > 0$ のとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}$ を求めよ.

3　演習問題　(自習用問題. 必ず解いてみよう.)

1　次の関数の増減を調べ, 極値を求めよ.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$　　(2) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}(2 - x)$

2　次の極限値を求めよ. ただし, a, b は正の定数とする. (演習書 問題 3.2.2)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \log \frac{x-1}{x+1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2^{\sin x} - 2}{\log(\sin x)}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Tan}^{-1}x\right)$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^x - x}{x - \log x - 1}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

3　関数 $f(x) = \dfrac{(x+1)\log(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$ $(x > -1,\ x \neq 0)$ について, 次の手順でグラフを完成させよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1+0} f(x)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)$ 及び $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ を計算せよ.

(3) $-1 < x < 0$ の範囲に $f(x)$ を極大にする x が存在することを確認せよ.

(4) $x > 0$ における $f(x)$ の増減を調べよ.

(5) (1)–(4) の結果から $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

4　関数 $g(x) = \dfrac{x^2}{e^x - x - 1}$ $(x \neq 0)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $e^x - x - 1 \geqslant 0$ (等号は $x = 0$ のとき) が成り立つことを示せ.

(2) $g(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の連続関数となるように $g(0)$ の値を定めよ.

(3) $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $g(x)$ の $x = 0$ での微分可能性を示し, 導関数 $g'(x)$ を求めよ.

(4) $g(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で C^1 級, すなわち $g'(x)$ が連続であることを示せ.

5　関数 $\varphi(x) = x^4\left(\cos\dfrac{1}{x^2} + 2x^2\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$, $\psi(x) = x^3\left(4 + 3x^2\sin\dfrac{2}{x^2}\right)$ $(x \neq 0)$ について以下の問いに答えよ. (この問題はロピタルの定理の適用限界を示す 1 つの例)

(1) $\varphi'(x), \psi'(x)$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\varphi(x) = \lim_{x\to0}\psi(x) = \lim_{x\to0}\varphi'(x) = \lim_{x\to0}\psi'(x) = 0$ であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \lim_{x\to0}\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ を求めよ. 但し, $\varphi'(x)$ は $x = 0$ の近くに無数の零点をもつが, $\dfrac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ については約分することにより $x \neq 0$ で定義された関数と見なせる.

(4) $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, $g(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} g(x) = 0$ であり, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (約分して考える) はともに存在するが, その値は異なる. これを示せ.

※ この問題は `http://kobayashi.hub.hit-u.ac.jp/topics/lhopital.pdf` を参考にした.