数学演習第一（演習第 5 回）【解答例】

微積：極値, 関数の増減, ロピタルの定理 (2021 年 6 月 2 日実施)

1 小テスト問題

問 1 $f(x)$ は $[-1,1]$ で連続, $(-1,0)\cup(0,1)$ で微分可能.

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{Sin}^{-1}x-2x & (-1\le x<0)\\ \mathrm{Sin}^{-1}x+2x & (0\le x\le 1)\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}1/\sqrt{1-x^2}-2 & (-1<x<0)\\ 1/\sqrt{1-x^2}+2 & (0<x<1)\end{cases}$$

であるから $f(x)$ の増減は以下の通り.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	$2-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2+\frac{\pi}{2}$

$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ で極大値 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ をとり, $x=0$ で極小値 0 をとる. (正解は A, B)

問 2 $\frac{0}{0}$ 型の不定形に対してロピタルの定理を適用する (適用箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す).

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x+x\cos x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\boxed{\frac{1}{2}}.\qquad \text{(正解は C)}$$

2 番目の極限は分子分母を $\sin x$ で割って計算してもよい．あるいは最初から $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, $\sin x=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$ と変形すればロピタルの定理を用いることなく計算できる.

問 3 $\frac{0}{0}$ 型の不定形であるから, ロピタルの定理が適用できることを期待して, 分子分母を微分して極限を考えると,

$$\lim_{x\to+0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=-\lim_{x\to+0}\cos\frac{1}{x}\ \text{(極限は存在しない)}.$$

ここでの等号は $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}=0$ (実際, $|x\sin\frac{1}{x}|\le|x|\to 0$) および $\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x=1$ による．よって, ロピタルの定理は適用できない (要点 3 の (iii) が不成立)．そこで, 次のように考える:

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\left(\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=\boxed{0}.\qquad \text{(正解は A)}$$

問 4 まず, 対数をとった極限を考える．$\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形になるのでロピタルの定理を適用し (適用箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す),

$$\lim_{x\to\infty}\log(x\log x)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x\log x)}{\log x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x+\log(\log x)}{\log x}$$
$$=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\log x)}{\log x}\overset{\star}{=}1+\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\log x}}{\frac{1}{x}}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\log x}=1.$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x\log x)^{\frac{1}{\log x}}=e^1=\boxed{e}$. (正解は C).

2 レポート課題

問題 1 $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$ より, $f(x)$ の増減は左下の表の通り．よって, $f(x)$ は $\boxed{x=0\text{ で極小値 }f(0)=0}$, $\boxed{x=2\text{ で極大値 }f(2)=4/e^2}$ をとる.

問題 2 $f'(x)=\dfrac{2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{2-(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ より, $f(x)$ の増減は右下の表の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

問題 1 の増減表

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	$\searrow$	$2-\frac{\pi}{2}$

問題 2 の増減表

以下では, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

問題 3 まず, $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\dfrac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^2\sin^2 x}$ と変形する. ここで, $x\to 0$ において $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to 1$ であることを $f(x)\sim g(x)$ と表すことにすれば, $\sin x\sim x$ であるから, $x^2\sin^2 x\sim x^4$, $x+\sin x\sim 2x$. よって, $x-\sin x\sim$ (x^3 の定数倍) である期待される. 以上の考察から, 上で行った変形を更に進めて,

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{x^2\sin^2 x}=\frac{x+\sin x}{x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}=\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

ロピタルの定理を用いて, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=(1+1)\cdot 1^2\cdot\frac{1}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}$. 【別法】 ロピタルの定理を 4 回用いて, 力尽くで計算してもよい. 但し, 積の個数を少なくするために, $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$ と表しておいた方がよい.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-(1-\cos 2x)}{x^2(1-\cos 2x)}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}(2x-\sin 2x)}{\cancel{2}\{x(1-\cos 2x)+x^2\sin 2x\}}\\&\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)}{1-\cos 2x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}\cdot 2\sin 2x}{\cancel{2}(3\sin 2x+6x\cos 2x-2x^2\sin 2x)}\\&\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{4}\cos 2x}{\cancel{4}(3\cos 2x-4x\sin 2x-x^2\cos 2x)}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

問題 4 $\alpha>0$ に注意して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}\overset{\star}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=\boxed{0}$.

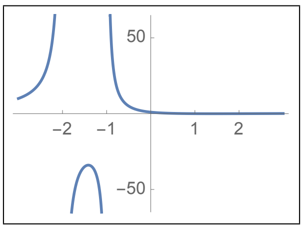
3 演習問題

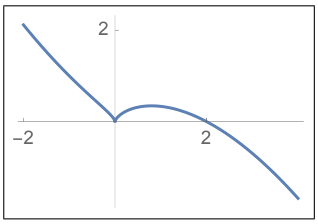
1 (1) まず, $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}$ は $x\neq -2,-1$ で連続かつ微分可能であることに注意する. $x\neq -2,-1$ において $f(x)=1-\dfrac{6x}{x^2+3x+2}$ を微分すると, $f'(x)=\dfrac{-6(x^2+3x+2)+6x(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}=\dfrac{6(x^2-2)}{(x^2+3x+2)^2}$. また, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=1$, $\displaystyle\lim_{x\to -1\pm 0}f(x)=\pm\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -2\pm 0}f(x)=\mp\infty$ (複号同順) であるから $f(x)$ の増減表は以下の通り. よって, 極大値は $f(-\sqrt{2})=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}=-17-12\sqrt{2}$, 極小値は $f(\sqrt{2})=\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}=-17+12\sqrt{2}$ である. グラフは左下の図の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	$-2-0$	$-2+0$	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1-0$	$-1+0$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	$+$	∞	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	1

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続, $x\neq 0$ において微分可能であり, 導関数は $f'(x)=\dfrac{2}{9}x^{-\frac{1}{3}}(2-x)-\dfrac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}=\dfrac{4-5x}{9\sqrt[3]{x}}$. よって, $x<0$ ならば $f'(x)<0$, $0<x<4/5$ ならば $f'(x)>0$, $4/5<x$ ならば $f'(x)<0$ である. また, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\mp\infty$ (複号同順), $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$ である. 以上のことから $f(x)$ の増減表は以下のようになり, 極大値は $f\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left(2-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$, 極小値は $f(0)=0$ である. グラフは右下の図の通り.

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$





2 ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x\log\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\log(x-1)-\log(x+1)}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{(x-1)(x+1)} = -2.$

(2) $y=\sin x$ とおいて, $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\sin x}-2}{\log(\sin x)} = \lim_{y\to 1}\frac{2^y-2}{\log y} \overset{\star}{=} \lim_{y\to 1}\frac{2^y\log 2}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 1} y\,2^y\log 2 = 2\log 2.$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin ax)}{\log(\sin bx)} \overset{\star}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos bx}{\sin bx}} = \lim_{x\to+0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}\frac{\sin bx}{\sin ax} = \lim_{x\to+0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}\cdot\frac{\frac{\sin bx}{bx}}{\frac{\sin ax}{ax}}\cdot\frac{b}{a} = 1.$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}x}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1.$

(5) まず, $y=x^x$ の導関数を計算する. $\log y = x\log x$ を微分して $\dfrac{y'}{y}=\log x+1$. よって, $y'=x^x(\log x+1)$ であるから, $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{x-\log x-1} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log x+1)-1}{1-\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\log x+1)^2+x^{x-1}}{\frac{1}{x^2}} = 2.$

(6) まず対数をとった極限を考える.

$$\lim_{x\to 0}\log\Big(\frac{a^b+b^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(a^x+b^x)-\log 2}{x} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x} = \frac{\log a+\log b}{2} = \log\sqrt{ab}$$

であるから, $\displaystyle \lim_{x\to 0}\Big(\frac{a^x+b^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\log(\frac{a^x+b^x}{2})^{1/x}} = e^{\log\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$ となる.

3 ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) 分母 $\sqrt[3]{x}$ は $x=-1$ で連続で, 値 -1 をとる. 一方, 分子の極限は

$$\lim_{x\to-1+0}(x+1)\log(x+1) = \lim_{x\to-1+0}\frac{\log(x+1)}{\frac{1}{x+1}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to-1+0}\frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = -\lim_{x\to-1+0}(x+1) = 0$$

と計算できる. よって, 求める極限は $\displaystyle \lim_{x\to-1+0} f(x)=0$ である.

(2) $x\to 0$ において $f(x)$ は $\frac{0}{0}$ 型の不定形である. ロピタルの定理を用いると,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\log(x+1)}{\sqrt[3]{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)+1}{\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}} = \lim_{x\to 0} 3(\sqrt[3]{x})^2\{\log(x+1)+1\} = 0$$

となり, $\displaystyle \lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$ を得る.

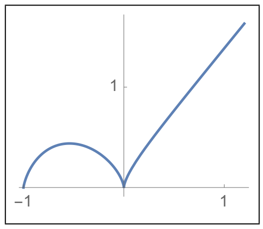
【注】(1), (2) の結果から, 与えられた関数 $f(x)$ は $f(-1)=f(0)=0$ と定めることにより, $x\geq -1$ で定義された連続関数と見なすことができる. 以下では, こうして得られた $x\geq -1$ 上の連続関数 $f(x)$ を考える.

(3) $x>-1, x\neq 0$ において, $f'(x)=\dfrac{(2x-1)\log(x+1)+3x}{3(\sqrt[3]{x})^4}$, $f''(x)=\dfrac{(x-2)\{3x-2(x+1)\log(x+1)\}}{9(x+1)(\sqrt[3]{x})^7}$.
ここで, $\varphi(x)=3x-2(x+1)\log(x+1)$ とおけば, $\varphi'(x)=1-2\log(x+1)\geq 1$ $(-1<x\leq 0)$, $\varphi(0)=0$ であるから, $\varphi(x)<0$ $(-1<x<0)$, 従って $f''(x)=\dfrac{(x-2)\varphi(x)}{9(x+1)(\sqrt[3]{x})^7}<0$ $(-1<x<0)$ となり, $y=f(x)$ が $-1<x<0$ において上に凸であることが分かる. $f(-1)=f(0)=0$ であるから, $f(x)$ はこの区間上のただ 1 点 (α とする) で極大になることが分かる.

(4) (3) で求めた $f'(x)$ を $x>0$ において考える. $\psi(x)=(2x-1)\log(x+1)+3x$ ($x>-1$ で定義される) とおけば, $\psi'(x)=2\log(x+1)+5-\dfrac{3}{x+1}\geq 2$ $(x\geq 0)$, $\psi(0)=0$ であるから, $\psi(x)>0$ $(x>0)$. 従って $f'(x)=\dfrac{\psi(x)}{3(\sqrt[3]{x})^4}>0$ $(x>0)$ となり, $f(x)$ が $x>0$ において単調増加であることが分かる.

(5) 最後に $x\to\pm 0$ における $f'(x)$ の極限を調べる. (4) で定めた $\psi(x)$ は $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=2>0$ を満たすから, $\displaystyle \lim_{x\to\pm 0} f'(x) = \lim_{x\to\pm 0}\frac{\psi(x)}{3(\sqrt[3]{x})^4} \overset{\star}{=} \lim_{x\to\pm 0}\frac{\psi'(x)}{4\sqrt[3]{x}} = \pm\infty$ (複号同順). また, $\displaystyle \lim_{x\to-1+0} f'(x)=\infty$, $\displaystyle \lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ はほとんど明らか. 以上, (1)–(4) と合わせて, 増減表及び $y=f(x)$ のグラフは以下のようになる.

x	$-1+0$	$\cdots$	α	$\cdots$	-0	$+0$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$	∞	$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0		$\nearrow$	∞



4 ロピタルの定理を用いた箇所を $\stackrel{\star}{=}$ で表す．

(1) $f(x)=e^x-x-1$ とおく．$f'(x)=e^x-1$ より，$x>0$ で $f'(x)>0$, $x<0$ で $f'(x)<0$ である．すなわち，$f(x)$ は $x<0$ で単調減少，$x>0$ で単調増加である．最小値が $f(0)=0$ より，$f(x)\geq 0$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-x-1}\stackrel{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}\stackrel{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x}=2$ なので，$g(0)=2$ と定めればよい．

(3) 定義により，$\displaystyle g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2(e^h-h-1)}{h(e^h-h-1)}\stackrel{\star}{=}\lim_{h\to 0}\frac{2h-2e^h+2}{h(e^h-1)+(e^h-h-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{1+h\cdot\frac{e^h-1}{e^h-h-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{1+g(h)\cdot\frac{e^h-1}{h}}=-\frac{2}{1+g(0)}=-\frac{2}{3}$．よって，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能である．また，$x\neq 0$ においては，$\displaystyle g'(x)=\frac{2x(e^x-x-1)-x^2(e^x-1)}{(e^x-x-1)^2}=-\frac{(x^2-2x)e^x+x^2+2x}{(e^x-x-1)^2}$．以上をまとめて，$g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{(x^2-2x)e^x+x^2+2x}{(e^x-x-1)^2} & (x\neq 0)\\[2mm] -\dfrac{2}{3} & (x=0)\end{cases}$．

(4) $x\neq 0$ のとき，$g'(x)$ の分子，分母はともに連続で，分母は 0 にならないので連続である．$x=0$ での連続性については，$\displaystyle g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}\stackrel{\star}{=}\lim_{h\to 0}g'(h)$ より，$g'(x)$ は $x=0$ で連続である．

【注】上の論法 (ロピタルの定理) により，一般に連続関数 $\varphi(x)$ が $x=a$ を除いて微分可能であることが分かっているとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\varphi'(x)$ が存在すれば，実は $\varphi'(a)$ が存在して，$\varphi'(x)$ は $x=a$ で連続となる．

5 (1) $\displaystyle\varphi'(x)=4x^3\left(\cos\frac{1}{x^2}+2x^2\sin\frac{1}{x^2}\right)+x^4\left(\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}+4x\sin\frac{1}{x^2}-2x^2\cdot\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\right)=2x(1+6x^4)\sin\frac{1}{x^2}$，

$$\psi'(x)=3x^2\left(4+3x^2\sin\frac{2}{x^2}\right)+x^3\left(6x\sin\frac{2}{x^2}-\frac{12}{x}\cos\frac{2}{x^2}\right)=12x^2\left(1-\cos\frac{2}{x^2}\right)+15x^4\sin\frac{2}{x^2}$$
$$=24x^2\sin^2\frac{1}{x^2}+30x^4\cos\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}=6x^2\left(4\sin\frac{1}{x^2}+5x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)\sin\frac{1}{x^2}.$$

(2) $0<|x|\leq 1$, $x\to 0$ のとき，$|\varphi(x)|\leq x^4(1+2x^2)\leq 3x^4\to 0$, $|\psi(x)|\leq |x|^3(4+3x^2)\leq 7|x|^3\to 0$, $|\varphi'(x)|\leq 2|x|(1+6x^4)\leq 14|x|\to 0$, $|\psi'(x)|\leq 6x^2(4+5x^2)\leq 54x^2\to 0$. よって，確かに，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\psi'(x)=0$.

(3) $\displaystyle\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{x(\cos\frac{1}{x^2}+2x^2\sin\frac{1}{x^2})}{4+3x^2\sin\frac{2}{x^2}}$, $\displaystyle\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{3x(4\sin\frac{1}{x^2}+5x^2\cos\frac{1}{x^2})}{1+6x^4}$ ($2x\sin\frac{1}{x^2}$ で約分した) であるから，$0<|x|\leq 1$, $x\to 0$ のとき，$\displaystyle\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right|\leq\frac{|x|(1+2x^2)}{4-3x^2}\leq 3|x|\to 0$, $\displaystyle\left|\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right|\leq 3|x|(4+5x^2)\leq 27|x|\to 0$.

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}=0$.

(4) $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, $g(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ とおけば，(2) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}g(x)=0$. 実は，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}g'(x)=0$ も成り立つ．また，(3) の結果を用いて，$x\to 0$ のとき，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{\varphi(x)-\psi(x)}=\frac{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}+1}{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-1}\to -1,\qquad \frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\varphi'(x)+\psi'(x)}{\varphi'(x)-\psi'(x)}=\frac{1+\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}}{1-\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}}\to 1.$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=-1\neq 1=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.