数学演習第一（演習第 6 回）

線形：連立 1 次方程式

2021 年 6 月 9 日

要点

〈係数行列，拡大係数行列〉

連立 1 次方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ を考える．このとき，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とすれば，この連立 1 次方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表せる．このとき，行列 A を**係数行列**，$[\,A\ \ \boldsymbol{b}\,]$ を**拡大係数行列**という．

〈連立 1 次方程式の解〉

- まず，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．拡大係数行列 $[\,A\ \ \boldsymbol{b}\,]$ を簡約化した行列が $[\,C\ \ \boldsymbol{d}\,]$ であるとき，行基本変形の意味を考えれば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ は同値な連立 1 次方程式であるから，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解くには $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ を解けばよい．解をもつための条件は $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank}[\,C\ \ \boldsymbol{d}\,]$ つまり $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[\,A\ \ \boldsymbol{b}\,]$ である．さらに $n = \operatorname{rank} A$ であるとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は 1 つであり，$n \neq \operatorname{rank} A$ であるとき $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $s = n - \operatorname{rank} A$ 個のパラメータ (任意定数) を含む形で表される．この s を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**解の自由度**という．
- 特に $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $s = n - \operatorname{rank} A$ 個の 1 次独立な解をもつ．この s 個の 1 次独立な解を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解**と呼ぶ．

〈例〉 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする．

- まず，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ を考える．$[\,A\ \ \boldsymbol{d}\,]$ を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 4 \end{bmatrix}$ なので，$a = -2$ のとき解なし．$a \neq -2$ のとき，さらに $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a-2}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{a+2} \end{bmatrix}$ まで変形され，解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a-2}{a+2} \\ \frac{a-2}{a+2} \\ \frac{4}{a+2} \end{bmatrix}$．
- 次に，同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考える．A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$．$a \neq -2$ のとき，解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$．$a = -2$ のとき，$x_3 = t$ とおくと $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t は任意定数)．ここで $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が基本解．

1　小テスト問題（オンライン受験）

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を考える．$[A\ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列が $[C\ \ \boldsymbol{d}]$ であるとき，以下の問いに答えよ．

問 1　$[A\ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列が $[C\ \ \boldsymbol{d}]=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}$ であるとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解について正しい主張をしているものを次から選択せよ．

1．解は 1 つ．　**2**．解が存在し，解の自由度は 1．　**3**．解が存在し，解の自由度は 2．
4．解は存在しない．

問 2　$[A\ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列が $[C\ \ \boldsymbol{d}]=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ であるとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解について正しい主張をしているものを次から選択せよ．

1．解は 1 つ．　**2**．解が存在し，解の自由度は 1．　**3**．解が存在し，解の自由度は 2．
4．解は存在しない．

問 3　$[A\ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列が $[C\ \ \boldsymbol{d}]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&1&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ であるとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解について正しい主張をしているものを次から選択せよ．

1．解は 1 つ．　**2**．解が存在し，解の自由度は 1．　**3**．解が存在し，解の自由度は 2．
4．解は存在しない．

問 4　$[A\ \ \boldsymbol{b}]$ の簡約行列が $[C\ \ \boldsymbol{d}]=\begin{bmatrix}1&2&0&0&1\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ であるとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解について正しい主張をしているものを次から選択せよ．

1．解は 1 つ．　**2**．解が存在し，解の自由度は 1．　**3**．解が存在し，解の自由度は 2．
4．解は存在しない．

2　レポート課題（オンライン提出）

次の連立 1 次方程式を解きなさい．ただし，(1) は逆行列を用い，(2), (3), (4) は拡大係数行列の簡約化を利用すること．また，解が存在しない場合は「解なし」と答えよ．

(1) $\begin{cases}5x-4y=3\\3x-2y=1\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+y+z=4\\2x+3y+2z=5\\-3x-3y-2z=-7\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x+2y+4z=5\\2x+3y+z=9\\x+y+z=3\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}2x+y+z=0\\3x+4y+9z=0\\x+y+2z=0\end{cases}$

3　演習問題 (自習用問題. 必ず解いてみよう.)

1 次の連立 1 次方程式を解け. ((1) は逆行列を用い, (2) は拡大係数行列を簡約化せよ.)

(1) $\begin{cases} 7x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 5x_4 = \ \ 1 \\ \ x_1 \qquad\quad - \ \ 2x_3 + \ \ x_4 = -4 \\ \ x_1 + 2x_2 + \ \ 8x_3 + 3x_4 = \ \ 2 \\ \ x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 4x_4 = \ \ 5 \end{cases}$

2 次の同次連立 1 次方程式を解け. 更に, **基本解**と**解の自由度**を求めよ.

(1) $\begin{cases} -x + 5y + 4z = 0 \\ \ 2x + \ \ y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + \ \ z = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \ x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad + \ \ x_4 = 0 \\ 3x_1 + \ \ x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ \qquad\ \ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ \ x_1 - \ \ x_2 + x_3 - \ \ x_4 = 0 \end{cases}$

3 連立 1 次方程式 $\begin{cases} \ x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ \ x + \ \ y + az = b \\ ax + by + \ \ z = 1 \end{cases}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 係数行列と拡大係数行列の階数を調べよ (a, b の値によって場合分け).

(2) (1) の場合分けに対応して, 解の個数 (ただ 1 つ, 無数, なし) を調べよ.

(3) 解を「3 平面の共有点の集合」と見て, 図形的な言葉 (点, 直線, 空集合) で解を表現せよ.

4 ベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は定数) について次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が **1 次独立** (すなわち $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$) となるような k の条件を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が **1 次従属** (すなわち $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ を満たす $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ が存在) となるような k の条件を求めよ. また, そのとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の**非自明な 1 次関係式** $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ ($(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$) を 1 つ挙げよ.

[**ヒント**] c_1, c_2, c_3, c_4 を未知数 (変数) とする同次連立 1 次方程式を考えよ.