数学演習第一（演習第 6 回）【解答例】

線形：連立 1 次方程式 (2021 年 6 月 9 日実施)

1 小テスト問題

問 1 $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank}[C \ \ \boldsymbol{d}] = 3$ より解は存在する． (正解は **1**)

問 2 $2 = \operatorname{rank} C \neq \operatorname{rank}[C \ \ \boldsymbol{d}] = 3$ より解は存在しない． (正解は **4**)

問 3 $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank}[C \ \ \boldsymbol{d}] = 2$ より解は存在する．解の自由度は $n - \operatorname{rank} C = 2$. (正解は **3**)

問 4 $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank}[C \ \ \boldsymbol{d}] = 2$ より解は存在する．解の自由度は $n - \operatorname{rank} C = 2$. (正解は **3**)

2 レポート課題

(1) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}}$.

(2) この連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+3\times①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{①-③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

よって, 求める解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}}$.

(3) この連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-3\times①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+②]{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-3\times③} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

よって, $\boxed{\text{解なし}}$. (上では簡約行列まで変形したが, 「解なし」は 1 段目の計算だけで分かる.)

(4) この連立 1 次方程式の係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-3\times①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[③+②]{①-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, 求める解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boxed{t\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}$ (t は任意定数).

3　演習問題

1 (1) 与えられた連立1次方程式は $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と書ける．よって，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

解法の指定がなければ，勿論, 拡大係数行列を簡約化して解いてもよい.

(2) 拡大係数行列を簡約化して,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 2 & 10 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程式は $\begin{cases} x_1 \quad - 2x_3 = -4 \\ x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，求める解は $x_3 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+2t \\ 3-5t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

2 係数行列を簡約化して解を求める.

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから,

方程式は $\begin{cases} x \quad + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，解は $z = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

よって, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ で解の自由度は 1.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから,

方程式は $\begin{cases} x_1 \quad + \frac{1}{2}x_3 \qquad = 0 \\ \quad x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので, 解は $x_3 = 2s$, $x_4 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s-t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

よって, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で, 解の自由度は 2.

3 説明の便宜のため, 係数行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$, 拡大係数行列を $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right]$ と書く. まず, B に行基本変形を施して,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \\ a & b & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & b-a & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{bmatrix} (= B_1 \text{ とおく}).$$

(1)
- $b \neq a \neq 1$ ($a \neq b$ かつ $a \neq 1$) のとき, 明らかに $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 3$.
- $b = a = 1$ のとき, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 1$.
- $b = a \neq 1$ のとき, $B_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となり, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 2$.
- $b \neq a = 1$ のとき, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となり, $\operatorname{rank} A = 2$, $\operatorname{rank} B = 3$.

【注】階数を求めるだけなら上の形まで変形すれば十分. (勿論, 簡約行列まで求めてもよい.)

(2)
- $b \neq a = 1$ のとき, $\operatorname{rank} A = 2 < 3 = \operatorname{rank} B$ より, 解なし.
- $b \neq a \neq 1$ のとき,

$$B_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a-1}{a-b} & \frac{a-1}{a-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{a-1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{b-1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-1}{a-1} \end{bmatrix} \text{ より, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b-1}{a-1} \\ 1 \\ \frac{b-1}{a-1} \end{bmatrix} \text{ (ただ 1 つの解).}$$

- $b = a \neq 1$ のとき, $B_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (無数の解).
- $b = a = 1$ のとき, $B_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (無数の解).

(3)
- $b \neq a = 1$ のとき, 解集合は<u>空集合</u>.
- $b \neq a \neq 1$ のとき, 解集合は <u>1 点</u> $\left(-\dfrac{b-1}{a-1}, 1, \dfrac{b-1}{a-1}\right)$.
- $b = a \neq 1$ のとき, 解集合は点 $(0, 0, 1)$ を通り, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線となる. すなわち, 解集合は<u>直線</u> $-x = y$, $z = 1$.
- $b = a = 1$ のとき, 解集合は点 $(1, 0, 0)$ を通り, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に平行な平面となる. 法線ベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ で与えられるから, 解集合は<u>平面</u> $(x-1) + y + z = 0$, 整理して $x + y + z = 1$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の 1 次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$ は c_1, c_2, c_3, c_4 を未知数 (変数) とする同次連立 1 次方程式

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{$*$}$$

と見なせる. 係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & k \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & k+2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立とは $(*)$ の解が $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ に限られることであるから, 求める条件は $k \neq 1$.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次従属とは $(*)$ が自明でない解をもつことであるから, 求める条件は $k = 1$. このとき $(*)$ の解は $c_1 = -t$, $c_2 = t$, $c_3 = -t$, $c_4 = t$ (t は任意定数). 特に, $t = -1$ と選び, 非自明な 1 次関係式 $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$ を得る.