数学演習第一 （演習第７回）

微積：高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開

2021 年 6 月 23 日

要点 1

1°. n 回微分可能, n 回連続微分可能 (C^n 級)

- 微分可能 = 1 回微分可能, 導関数 = 1 次導関数と解釈する. $n \geqslant 2$ に対して, 帰納的に, $f(x)$ が $n-1$ 回微分可能で, $n-1$ 次導関数 $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能なとき, $f(x)$ は **n 回微分可能** であるといい, $f^{(n-1)}(x)$ の導関数 $f^{(n)}(x) := \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$ を **n 次導関数**という.
- $f(x)$ が n 回微分可能で n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続のとき, $f(x)$ は **n 回連続微分可能**または **C^n 級**という. (微分可能なら連続ゆえ) $f(x)$ が n 回微分可能ならば C^{n-1} 級であることが保証される. また, $f(x)$ が何回でも微分可能なとき, $f(x)$ は**無限回微分可能**または **C^∞ 級**という.

2°. Leibniz（ライプニッツ）の公式

$f(x), g(x)$ が n 回微分可能ならば, 積 $f(x)g(x)$ も n 回微分可能であり, 次の関係式が成り立つ:

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x). \qquad (\textbf{注}:\ f^{(0)}=f,\ f^{(1)}=f',\ f^{(2)}=f'')$$

3°. 基本的な関数の n 次導関数

① $(e^x)^{(n)} = e^x$. ② $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. ③ $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

④ $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. 一般に, $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ (α は定数, $n \geqslant 1$).

⑤ $(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ ($n \geqslant 1$).

要点 2

1°. 有限 Taylor（テイラー）展開

$f(x)$ が a を含む開区間 I で N 回微分可能なとき, 各 $x \in I$ に対して,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_N(x), \qquad \underbrace{R_N(x)}_{N\text{ 次の剰余項}} = \frac{f^{(N)}(a+\theta(x-a))}{N!}(x-a)^N$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する. 特に, $a=0$ の場合を**有限 Maclaurin（マクローリン）展開**という.

2°. 基本的な関数の有限 Maclaurin（マクローリン）展開

① $e^x = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{x^n}{n!} + R_N(x)$.

② $\cos x = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + R_{2M}(x)$, ③ $\sin x = \sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + R_{2M+1}(x)$.

④ $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x^n + R_N(x)$, ⑤ $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_N(x)$ $(x>-1)$.

1　小テスト問題（オンライン受験）

問 1　関数 $\dfrac{1}{1-x}$ の n 次導関数は？　$(n \geqslant 1)$

[選択肢]　A. $\dfrac{(-1)^n n!}{(1-x)^n}$　B. $\dfrac{n!}{(1-x)^n}$　C. $\dfrac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$　D. $\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

問 2　関数 $\sin^2 x$ の n 次導関数は？　$(n \geqslant 1)$

[選択肢]　A. $-\cos^2\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$　B. $-\dfrac{1}{2}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

C. $-2^{n-1}\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$　D. $-2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

問 3　$\sin x$ の有限マクローリン展開を 7 次の剰余項 $R_7(x)$ を用いて表すと？

[選択肢]　A. $\sin x = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + R_7(x)$　B. $\sin x = x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} + R_7(x)$

C. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + R_7(x)$　D. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} + R_7(x)$

問 4　$\cosh x$ の有限マクローリン展開を 6 次の剰余項 $R_6(x)$ を用いて表すと？

[選択肢]　A. $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + R_6(x)$　B. $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + R_6(x)$

C. $\cosh x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + R_6(x)$　D. $\cosh x = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + R_6(x)$

2　レポート課題（オンライン提出）

答だけでなく考え方 (計算過程) も書くこと.

【1】 $f(x)=\log(3-2x)$ $(x<3/2)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geqslant 1)$ を求めよ.

【2】 $f(x)=x^2\cos x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + q_n(x)\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad (p_n(x), q_n(x) \text{ は } x \text{ の整式})$$

の形に表される. $p_n(x)$, $q_n(x)$ を求めよ. (ライプニッツの公式と $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$ を用いる)

【3】 $\sqrt{1+x}$ $(x>-1)$ の有限マクローリン展開 $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{3} a_n x^n + R_4(x)$ を求めよ. ($R_4(x)$も計算する)

【4】 e^{-x} の ($2N$ 次の剰余項をもつ) 有限マクローリン展開を求め, それより次の不等式を導け:

$$\sum_{n=0}^{2N-1}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \leqslant e^{-x} \leqslant \sum_{n=0}^{2N}\frac{(-1)^n}{n!}x^n \quad (x \geqslant 0).$$

3　演習問題　(自習用問題)

1　$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ の導関数を求め, C^1 級かどうかを調べよ.

2　開区間 I 上の C^2 級関数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ が与えられたとき, $\varphi'(t) \neq 0$ $(t \in I)$ であれば, y は x の C^2 級関数となる. このとき, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せば, 次の式が得られる. これを示せ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\{\varphi'(t)\}^3}.$$

$\boxed{3}$ 次の各関数 $y = y(x)$ について, n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ (演習書 問題 3.2.5 類題).

(0) **要点 1** の 3° を確認せよ. (1) $y = f(ax+b)$ (f は C^∞ 級, a, b は定数で $a \neq 0$)

(2) $y = \log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (3) $y = \cos^2 x$ ($\cos 2x$ で表す) (4) $y = \dfrac{1}{1+x-2x^2}$ (部分分数分解)

(5) $y = x^2 e^{-2x}$ (ライプニッツの公式) (6) $y = e^{-x}\cos x$ (まず y' を三角関数の合成で整理)

(7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (**2 重階乗**を用いて表せ) 但し, n の **2 重階乗** $n!!$ は

$$n!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdots n & (n \text{ 以下の奇数の積}) \quad \text{if } n \geqslant 1 : \text{奇数} \\ 2\cdot 4\cdots n & (n \text{ 以下の偶数の積}) \quad \text{if } n \geqslant 2 : \text{偶数} \end{cases} \quad \text{および} \quad (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される. 従って, 例えば $n! = (n-1)!!\cdot n!!$, $(2n)!! = 2^n n!$ $(n \geqslant 0)$ が成り立つ.

$\boxed{4}$ (演習書 問題 3.2.7 類題) 次の各関数 $f(x)$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を計算し, 有限マクローリン展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!}x^N \quad \underset{\theta \text{ は } x, N \text{ に依存}}{(0 < {}^\exists\theta < 1)}$$

を求めよ. 更に, $N = 6$ $(M = 3)$ のとき, 剰余項以外の部分を (記号 $\sum$ を使わず) 具体的に書け.

(0) **要点 2** の 2° を確認せよ. (1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ $(x > -1)$

(2) $f(x) = \cosh x$ (3) $f(x) = \sinh x$ ((2) は要点 2 の 2° の ② の形, (3) は ③ の形に)

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ (数値計算には電卓を用いてよい).

(1) レポート課題【4】の不等式 $(N = 4)$ を用いて, e^{-1}, e の近似値を求めよ.

(2) $\log(1+x)$ の有限マクローリン展開 ($2N+1$ 次の剰余項) から次の不等式を導け:

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \leqslant \log(1+x) \leqslant \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (x \geqslant 0).$$

更に, この不等式 $(N = 2)$ と $2 = (\frac{11}{10})^7 \cdot \frac{20000000}{19487171} = (1+0.1)^7(1+0.026316\cdots)$ を用いて, $\log 2$ の近似値を求めよ. (この不等式を $x = 1$ として利用することもできるが, N をかなり大きくしないとよい近似値が得られない.)

$\boxed{6}$ 関数 x^p, $\dfrac{1}{x^p}$ $(p \in \mathbb{N})$ に対して, $x = 1$ における有限 Taylor 展開を N 次 $(N > p)$ の剰余項 $R_N(x)$ まで求めよ.

$\boxed{7}$ $f(x)$ が 0 を含む開区間 I で C^∞ 級のとき, 任意の自然数 N に対して $f(x)$ は $\boxed{4}$ で述べた形の有限マクローリン展開をもつ. そこに現れる x^n の係数 $a_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ について以下の問いに答えよ.

(0) $f(x)$ が奇関数 (すなわち $f(-x) = -f(x)$) のとき $a_{2m} = 0$ となることを示せ. また, $f(x)$ が偶関数 (すなわち $f(-x) = f(x)$) のとき $a_{2m+1} = 0$ となることを示せ.

以下の関数 $f(x)$ は両方とも奇関数なので $f^{(2m)}(0) = a_{2m} = 0$ $(m \geqslant 0)$ が成り立つことに注意する.

(1) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\, x$ $(-1 < x < 1)$ のとき, ① $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ を示せ. ② この両辺を n 回微分して次式を示せ: $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$ $(n \geqslant 0)$. ③ $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ $(m \geqslant 0)$ を示せ. ④ a_{2m+1} $(m \geqslant 0)$ を求めよ. (例題 3.10 参照)

(2) $f(x) = \tan x$ に対して, ① $f'(x) = 1 + f(x)^2$ を確認せよ. ② 前式の両辺を n 回微分して $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(j)}(x)$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ で表せ. ③ $f^{(2m+1)}(0)$ を $f^{(2k+1)}(0)$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ で表せ. ④ a_{2m+1} を a_{2k+1} $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ で表せ. ⑤ a_1, a_3, a_5, a_7 を求めよ.