

数学演習第一（演習第7回）【解答例】

微積：高次の導関数，テーラーの定理，有限テーラー展開（2021年6月23日実施）

1 小テスト問題

問1 $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. (正解は D)

問2 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ より, $n \geq 1$ のとき,
 $(\sin^2 x)^{(n)} = -\frac{1}{2} \cdot 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$. (正解は C)

問3 $\sin x = \sum_{m=0}^2 \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_7(x)$ を用いて計算する:
 $\sin x = x + \frac{-1}{3!} x^3 + \frac{(-1)^2}{5!} x^5 + R_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_7(x)$. (正解は C)

問4 $f(x) = \cosh x$ とおけば, $f'(x) = \sinh x$, $f''(x) = \cosh x$ より,
 $f^{(2m)}(x) = \cosh x$, $f^{(2m+1)}(x) = \sinh x$ ($m \geq 0$).

よって, $f^{(2m)}(0) = 1$, $f^{(2m+1)}(0) = 0$ ($m \geq 0$) となるので,

$$\begin{aligned} \cosh x &= \sum_{n=0}^5 \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_6(x) = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + R_6(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_6(x). \end{aligned} \quad (\text{正解は A})$$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ と $e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \pm \frac{x^5}{120} + R_6(\pm x)$ を用いても同じ結果が得られる.

2 レポート課題

【1】 $(\log x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, $3-2x = (-2)x+3$ より,

$$f^{(n)}(x) = \{\log(3-2x)\}^{(n)} = (-2)^n \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(3-2x)^n} = -\frac{2^n \cdot (n-1)!}{(3-2x)^n}.$$

【2】 $n \geq 2$ のとき, $f(x) = x^2 \cos x$ に Leibniz の公式を適用して,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x^2 (\cos x)^{(n)} + n \cdot 2x (\cos x)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (\cos x)^{(n-2)} \\ &= x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1) \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + n(n-1) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} - \pi\right) \\ &= \{x^2 - n(n-1)\} \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

この式は $n = 0, 1$ でも正しい. よって, $p_n(x) = x^2 - n(n-1)$, $q_n(x) = 2nx$.

【3】 $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ とおけば,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, & f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}, & f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{24}x^4 \\ &= \boxed{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128} \frac{x^4}{(1+\theta x)^{7/2}}} \quad (0 < \theta < 1).\end{aligned}$$

【4】 $g(x) = e^{-x}$ とおけば, $g^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$, $g^{(n)}(0) = (-1)^n$ ($n \geq 0$). よって, e^{-x} の有限 Maclaurin 展開を $2N$ 次の剰余項 $R_{2N}(x)$ を用いて表すと,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{2N}(x) = \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{n!} x^n + R_{2N}(x), \quad R_{2N}(x) = \frac{e^{-\theta x}}{(2N)!} x^{2N} \quad (0 < \theta < 1).$$

特に, $x \geq 0$ ならば, $0 \leq R_{2N}(x) \leq x^{2N}/(2N)!$ であるから,

$$\sum_{n=0}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \leq e^{-x} \leq \sum_{n=0}^{2N} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad (x \geq 0).$$

3 演習問題

1 $f(x)$ は明らかに $x \neq 0$ において C^∞ 級であり, そこでの導関数は

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

また, $x = 0$ における微分係数は

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0 \quad (\text{最後の等号は } |h \sin(1/h)| \leq |h| \rightarrow 0 \text{ による}).$$

よって, $f(x)$ は \mathbb{R} 上で微分可能であり, その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる. ここで, $x \rightarrow 0$ のとき, $x \sin(1/x) \rightarrow 0$ であるが, $\cos(1/x)$ は 1 つの値に近づき得ないので $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない. (より直接的には, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1/(n\pi)$ で定めれば, $n \rightarrow \infty$ のとき, $a_n \rightarrow 0$ であるが, $f'(a_n) = -(-1)^n \neq 0 = f'(0)$ であるから, $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない.) よって, $f(x)$ は \mathbb{R} 上で微分可能だが, $x = 0$ の周りで C^1 級でない.

2 まず, 仮定より $x = \varphi(t)$ の逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が存在し, $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける. よって, y を x で微分すれば, 合成関数・逆関数の微分公式を用いて,

$$\frac{dy}{dx} = \{\psi(\varphi^{-1}(x))\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (x = \varphi(t)).$$

次に, $\omega(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば, $\frac{dy}{dx} = \omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから, 上と同じ論法で $\frac{d^2y}{dx^2} = \{\omega(\varphi^{-1}(x))\}' = \frac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. ここで, $\omega'(t) = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^2}$ より,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3} \quad (x = \varphi(t)).$$

次のように表現することもできる:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} \right) = \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt}.$$

3 (n の範囲がなければ $n \geq 0$ で正しいことを意味する.)

(0) ① $y = e^x$ は微分に対して不変であるから, 明らかに $y^{(n)} = e^x$. ②, ③ $(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ であるから, $\cos x, \sin x$ はともに 1 回微分するごとに “偏角” が $\frac{\pi}{2}$ ずつ増えていく. よって, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$, $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. ④ $y = x^\alpha$ のとき, $y^{(n)} = \alpha(\alpha -$

1) $\cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$ ($n \geq 1$). 特に, $y = 1/x = x^{-1}$ ($\alpha = -1$) のとき, $y^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-n-1} = (-1)^n n! / x^{n+1}$. ⑤ $(\log x)^{(n)} = (1/x)^{(n-1)} = (-1)^{n-1} (n-1)! / x^n$ ($n \geq 1$).

(1) $y' = f'(ax+b) \cdot (ax+b)' = af'(ax+b)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

(2) $y = \log(1-x) = \log((-1)x+1)$ より, (0)⑤ と (1) を用いて, $y^{(n)} = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} (n-1)! / (1-x)^n = (n-1)! / (1-x)^n$ ($n \geq 1$).

(3) $y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ より, (0)② と (1) を用いて, $y^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot 2^n \cos(2x + \frac{n\pi}{2}) = 2^{n-1} \cos(2x + \frac{n\pi}{2})$.

(4) $y = \frac{1}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} \right)$ と部分分数分解し, (0)④ と (1) の結果を用いて,

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x-2x^2} \right)^{(n)} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{(-1)^n (-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{2 \cdot 2^n (-1)^n n!}{(1+2x)^{n+1}} \right\} = \frac{n!}{3} \left\{ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(1+2x)^{n+1}} \right\}.$$

(5) $y = x^2 e^{-2x}$ より, $y' = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = -2(x^2 - x)e^{-2x}$. $n \geq 2$ のときは Leibniz の公式を用いて,

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^{-2x})^{(n-k)} = x^2 (e^{-2x})^{(n)} + n \cdot 2x (e^{-2x})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (e^{-2x})^{(n-2)}$$

$$= \{ (-2)^n x^2 + 2n(-2)^{n-1} x + n(n-1)(-2)^{n-2} \} e^{-2x} = \underbrace{(-2)^n \left\{ x^2 - nx + \frac{1}{4} n(n-1) \right\}}_{\text{この式は } n=0,1 \text{ でも正しい}}$$

(6) $y = e^{-x} \cos x$ より, $y' = e^{-x}(-\cos x - \sin x) = -\sqrt{2} e^{-x} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = -\sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.
 これを繰り返して, $y^{(n)} = (-\sqrt{2})^n e^{-x} \cos \left(x - \frac{n\pi}{4} \right)$. ($\{ e^{-x} \cos(x+\alpha) \}' = -\sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x + \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ (α は

定数) であることに注意.) Leibniz の公式を用いた表現も可能: $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{-x} \cos \left(x + \frac{k\pi}{2} \right)$.

(7) $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - (n-1) \right) x^{-\frac{1}{2}-n} = (-1)^n \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} x^{-\frac{1}{2}-n} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n x^{(2n+1)/2}}$.

4

以下, N 次剰余項 $R_N(x)$ の表現式の中の θ は $0 < \theta < 1$ を満たす適当な数 (x, N に依存) を表す.

(0) ① $f(x) = e^x$ より, $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$ ($n \geq 0$). よって,

$$e^x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{e^{\theta x}}{N!} x^N.$$

$N = 6$ なら, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + R_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + R_6(x)$.

② $f^{(n)}(x) = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$, $f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^m & (n = 2m) \\ 0 & (n = 2m+1) \end{cases}$ ($n \geq 0$) より,

$$\cos x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x), \quad R_{2M}(x) = \frac{\cos(\theta x + \frac{2M\pi}{2})}{(2M)!} x^{2M} = \frac{(-1)^M \cos \theta x}{(2M)!} x^{2M}.$$

$M = 3$ なら, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_6(x)$.

③ $f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$, $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ (-1)^m & (n = 2m+1) \end{cases}$ ($n \geq 0$) より,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x),$$

$$R_{2M+1}(x) = \frac{\sin(\theta x + \frac{(2M+1)\pi}{2})}{(2M+1)!} x^{2M+1} = \frac{(-1)^M \cos \theta x}{(2M+1)!} x^{2M+1}.$$

$M = 3$ なら, $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_7(x)$.

④ $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ ($n \geq 0$) より, $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ ($n \geq 0$). よって, $x > -1$ に対して,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}} = \underbrace{\frac{(-x)^N}{1+x}}_{\text{等比数列の和の公式による}}$$

$N = 6$ なら, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + R_6(x)$.

⑤ $f(x) = \log(1+x)$ より, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ ($n \geq 1$). 故に, $f(0) = 0, f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ ($n \geq 1$). よって, $x > -1$ に対して,

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N} x^N.$$

$$N = 6 \text{ なら, } \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + R_6(x).$$

(1) [3](7) の結果から, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$, $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}$, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ ($n \geq 0$). よって, $x > -1$ に対して,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{(2N-1)!!}{(2N)!!} \frac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+\frac{1}{2}}}.$$

$$N = 6 \text{ なら, } \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + R_6(x).$$

(2) $f(x) = \cosh x$ より, $f^{(2m)}(x) = \cosh x, f^{(2m+1)}(x) = \sinh x; f^{(2m)}(0) = 1, f^{(2m+1)}(0) = 1$ ($m \geq 0$). 故に,

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x), \quad R_{2M}(x) = \frac{\cosh \theta x}{(2M)!} x^{2M}.$$

$$M = 3 \text{ なら, } \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_6(x).$$

(3) $f(x) = \sinh x$ より, $f^{(2m)}(x) = \sinh x, f^{(2m+1)}(x) = \cosh x; f^{(2m)}(0) = 0, f^{(2m+1)}(0) = 1$ ($m \geq 0$). 故に,

$$\sinh x = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x), \quad R_{2M+1}(x) = \frac{\cosh \theta x}{(2M+1)!} x^{2M+1}.$$

$$M = 3 \text{ なら, } \sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_7(x).$$

【補足】 剰余項 $R_N(x)$ を評価して, 上に現れる関数は無限級数で表現できることが分かる. 但し, その中のいくつかは収束する x の範囲が制限される.

$$\textcircled{1} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \textcircled{2} \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}, \quad \textcircled{3} \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1},$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1), \quad \textcircled{5} \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$(1) \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$(2) \cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad (3) \sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

5

(1) レポート課題【4】の不等式 ($N = 4$) を用いて,

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} \\ \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} \quad (x \geq 0).$$

これに $x = 1$ を代入すれば, $0.367857 \dots \leq \frac{103}{280} \leq e^{-1} \leq \frac{2119}{5760} = 0.367881 \dots$ が得られ, $e^{-1} \approx 0.3679$.

また, 逆数をとれば, $2.718263 \dots \leq \frac{5760}{2119} \leq e \leq \frac{280}{103} = 2.718446 \dots$ となり, $e^{-1} \approx 2.718$. なお, 厳密な値は $e^{-1} = 0.367879441 \dots, e = 2.718281828 \dots$.

(2) $\log(1+x)$ の有限 Maclaurin 展開を $2N+1$ 次の剰余項 $R_{2N+1}(x)$ を用いて表せば, $x > -1$ において,

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_{2N+1}(x), \quad R_{2N+1}(x) = \frac{x^{2N+1}}{(2N+1)(1+\theta x)^{2N+1}}.$$

$x \geq 0$ のとき $0 \leq R_{2N+1}(x) \leq x^{2N+1}/(2N+1)$ であるから,

$$\sum_{n=0}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \leq \log(1+x) \leq \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (x \geq 0).$$

ここで, $N=2$ とすれば,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \quad (x \geq 0).$$

この不等式と $2 = \left(\frac{11}{10}\right)^7 \cdot \frac{20000000}{19487171} = (1+0.1)^7(1+0.026316\cdots)$ を用いて, $\log 2$ の近似値を求めてみよう.

$$0.095308\cdots \leq \log(1+0.1) \leq 0.095310\cdots, \quad 0.025975\cdots \leq \log(1+0.026316\cdots) \leq 0.025975\cdots$$

であるから, $0.69313\cdots \leq \log 2 = 7\log(1+0.1) + \log(1+0.026316\cdots) \leq 0.69314\cdots$ となり, $\log 2 \approx 0.6931$. 厳密な値は $\log 2 = 0.69314718\cdots$.

6

(1) $x^p = \{1 + (x-1)\}^p = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} (x-1)^n$. ($R_N(x) = 0$)

(2) $\left(\frac{1}{x^p}\right)^{(n)} = (-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)\frac{1}{x^{p+n}} = (-1)^n p(p+1)\cdots(p+n-1)\frac{1}{x^{p+n}} = (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!} \frac{1}{x^{p+n}}$
 より, $\frac{1}{x^p} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} (x-1)^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \binom{N+p-1}{N} \frac{(-1)^N (x-1)^N}{\{1+\theta(x-1)\}^{N+p}}$ ($0 < \theta < 1$).

7

(1) 最初に $\frac{d^n}{dx^n} f(-x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ に注意する.

- $f(x)$ が奇関数のとき: $f(-x) = -f(x)$ の両辺を $2m$ 回微分して, $f^{(2m)}(-x) = -f^{(2m)}(x)$. これより $f^{(2m)}(0) = -f^{(2m)}(0)$, すなわち $f^{(2m)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m} = \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} = 0$.

- $f(x)$ が偶関数のとき: $f(-x) = f(x)$ の両辺を $2m+1$ 回微分して, $-f^{(2m+1)}(-x) = f^{(2m+1)}(x)$. これより $-f^{(2m+1)}(0) = f^{(2m+1)}(0)$, すなわち $f^{(2m+1)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = 0$.

(2) ① $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ より, $(1-x^2)f''(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = xf'(x)$.

② $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ の両辺を n 回 ($n \geq 1$) 微分すると, Leibniz の公式により

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - n \cdot 2xf^{(n+1)}(x) - \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2f^{(n)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x).$$

これを整理して, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$. ($n=0$ での成立は明らか).

③ $n=2m-1$ ($m \geq 1$) の場合の②の関係式に $x=0$ を代入して, $f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2 f^{(2m-1)}(0)$. この関係式を繰り返し用いて, $m \geq 1$ に対し

$$f^{(2m+1)}(0) = (2m-1)^2 f^{(2m-1)}(0) = \cdots = (2m-1)^2 \cdots 3^2 \cdot 1^2 f'(0) = \{(2m-1)!!\}^2.$$

ここで, $f'(0) = 1$ を用いた. $(-1)!! = 1$ に注意すれば, $f^{(2m+1)}(0) = \{(2m-1)!!\}^2$ ($m \geq 0$).

④ $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \frac{\{(2m-1)!!\}^2}{(2m+1)!!(2m)!!} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{1}{2m+1}$ ($m \geq 0$).

【補足】 実は, $\text{Sin}^{-1} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$ ($-1 \leq x \leq 1$) が成り立つ.

(3) ① $f(x) = \tan x$ より, $f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + f(x)^2$.

② $n \geq 1$ のとき $f'(x) = 1 + f(x)^2$ を n 回微分して, $f^{(n+1)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) f^{(j)}(x)$. $n=0$ のときは $f'(x) = 1 + f(x)^2$.

③ $f^{(2k)}(0) = 0$ より,

$$f^{(2m+1)}(0) = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} f^{(2m-j)}(0) f^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} f^{(2m-2k-1)}(0) f^{(2k+1)}(0) \quad (m \geq 1).$$

④ $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \frac{(2m)!}{(2m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2m-2k-1)}(0) f^{(2k+1)}(0)}{(2m-2k-1)!(2k+1)!} = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} a_{2m-2k-1} a_{2k+1}$ ($m \geq 1$).

⑤ $a_1 = f'(0) = 1$ と④の関係式を用いて,

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1^2 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{5} (a_3 a_1 + a_1 a_3) = \frac{2}{15}, \quad a_7 = \frac{1}{7} (a_5 a_1 + a_3^2 + a_1 a_5) = \frac{17}{315}.$$