数学演習第一　演習第 8 回 【解答例】

線形：正則行列，逆行列，2 次または 3 次の行列式

2021 年 6 月 30 日　実施

1　小テスト問題

問 1 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = \boxed{-8}$.　(正解は B)

問 2 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$．あるいは公式を用いて，$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$．よって，逆行列の $(2,1)$ 成分は $\boxed{1}$.　(正解は C)

問 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 - (1 + 1 + 4) = \boxed{-1}$.　(正解は B)

問 4 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
よって，逆行列の $(3,1)$ 成分は $\boxed{-1}$.　(正解は A)

2　レポート課題

問題 1　$|A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & 0 \\ 2 & \lambda + 3 & 2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$．よって，$\boxed{\lambda = 1, -1, 2}$.

問題 2　IV を用いて調べる．

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となり，左側の行列が単位行列にならないので $\boxed{\text{正則でない}}$.

【注】「A が正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$」 $\cdots$ $(*)$ を用いれば，$\lambda = 2$ のとき $|A| = 0$ なので $\boxed{\text{正則でない}}$．$(*)$ は演習第 10 回で扱う予定.

問題 3　IV を用いて調べる．

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

となり，左側の行列が単位行列になるので $\boxed{\text{正則である}}$．さらに逆行列 A^{-1} は

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -3/4 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}}.$$

【注】 この問題も $(*)$ を用いれば，$\lambda = 3$ のとき $|A| = 8 \neq 0$ なので $\boxed{\text{正則である}}$.

問題 4　$\begin{vmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \end{vmatrix} = 4a - 24$ となる．よって，$|4a - 24| = 4$ を解けばよい．$a \geq 6$ のとき，$4a - 24 = 4$ を解いて $a = 7$．$a < 6$ のとき，$-(4a - 24) = 4$ を解いて $a = 5$．(あるいは $|4(a - 6)| = 4$ より $a - 6 = \pm 1$.) よって，$\boxed{a = 5, 7}$.

3 演習問題

$\boxed{1}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とする．

(1) $|A| = ad - bc$ (2) $A\widetilde{A} = (ad-bc)E_2$

(3) $|A| = ad - bc \neq 0$ なので，$C = (ad-bc)^{-1}\widetilde{A}$ とおけば，(2) より $AC = E_2$ となる．よって，III より A は正則であり $A^{-1} = C$.

(4) $|AB| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$

$= (acef + adeh + bcfg + bdgh) - (acef + adfg + bceh + bdgh)$

$= ad(eh-fg) + bc(fg-eh) = (ad-bc)(eh-fg) = |A||B|.$

(5) $|A| \neq 0$ ならば A は正則であることは (3) で示したので，その逆を示す．A が正則のとき I より，$AD = E_2$ となる行列 D が存在する．両辺の行列式を取って，左辺に対して (4) を用いれば，$|A||D| = |E_2| = 1$ となる．$|A| = 0$ とすれば $|A||D| = 1$ に矛盾するので，$|A| \neq 0$ が成り立つ．

$\boxed{2}$ (1) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$ なので $\boxed{1}$ (5) より $r \neq 0$ のとき正則．よって，$r \neq 0$ のとき $\boxed{1}$ (3) より逆行列は $\dfrac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} \lambda+3 & 4 \\ 2 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+7)$ なので $\boxed{1}$ (5) より $\lambda \neq -1, -7$ のとき正則．よって，$\lambda \neq -1, -7$ のとき $\boxed{1}$ (3) より逆行列は $\dfrac{1}{(\lambda+1)(\lambda+7)}\begin{bmatrix} \lambda+5 & -4 \\ -2 & \lambda+3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ となる．よって，IV より正則でない．

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を行基本変形により簡約行列に変形すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．よって，IV より正則であり逆行列は $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_4 & B \end{bmatrix}$ (とおく).

よって，IV より正則であり逆行列は B.

$\boxed{3}$ (1) $\lambda = 2, A = E_2$ とすれば，$|\lambda A| = 4$ だが $\lambda|A| = 2$ となる．よって，成り立たない．

(2) $\boxed{1}$ (4) より $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$ が成り立つ．

(3) $A = B = E_2$ とすれば，$|A+B| = 4, |A| + |B| = 2$ となる．よって，成り立たない．

(4) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると，$|{}^tA| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$ が成り立つ．

(5) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ とすると，$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ であり，

$$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|^2} \cdot (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = \frac{1}{|A|^2} \cdot |A| = |A|^{-1}$$

が成り立つ．

4 (1) $[A \;\; B]$ を行基本変形により簡約行列に変形すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$ となるので，$A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -15 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$ となる．よって，$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -15 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$.

(2) 両辺の転置をとり，B は交代行列 $({}^tB = -B)$ であることに注意すると，${}^tA\,{}^tY = -B$ となる．(1) と同様にして，${}^tY = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -11 \\ -7 & 6 & 9 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ を得る．よって，$Y = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 \\ -5 & 6 & 4 \\ -11 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ となる．

5 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$

(3) $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$

6 (1) 直交行列であることは計算して ${}^tPP = E_2$ を示せばよい．逆行列は $P^{-1} = {}^tP = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(2) 直交行列であることは計算して ${}^tQQ = E_3$ を示せばよい．逆行列は

$$Q^{-1} = {}^tQ = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}$ とおくと $R = QD$ となり，仮定 $r\sin\theta \neq 0$ により $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix}$.
よって，${}^tR = {}^tD\,{}^tQ = DQ^{-1}$ であり，

$$\begin{aligned} ({}^tR)^{-1} = QD^{-1} &= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} \\ \sin\theta\sin\varphi & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} \\ \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = -19$ より, $S = |-19| = 19$.

(2) $T = S/2 = 19/2$.

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$ より, $V = |-10| = 10$.

(4) $W = V/6 = 5/3$.