数学演習第一（演習第９回）【解答例】

微積： 漸近展開, 積分の計算 (1)　　2021 年 7 月 7 日

0　要点（漸近展開の要点）

空欄の中身は並んでいる順に

$$\boxed{\frac{1}{n!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n)!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}},\quad \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{n}},\quad \boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}},\quad \boxed{(-1)^n}.$$

1　小テスト問題

問 1

Ⓐ $e^x = 1 + x + o(x)$

Ⓑ $\sin x = x + o(x)$

Ⓒ $x\cos x = x(1+o(1)) = x + o(x)$

D. $\log\dfrac{1}{1+x} = -\log(1+x) = -x + o(x)$

問 2

Ⓐ $-e^x = -\Big(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) = -1 - x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

B. $x\sin\dfrac{x}{2} = x\Big(\dfrac{x}{2} + o(x)\Big) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

Ⓒ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

Ⓓ $\log(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

問 3

Ⓐ $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

Ⓑ $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

Ⓒ $3x\cos\dfrac{x}{3} = 3x\Big(1 - \dfrac{x^2}{18} + o(x^2)\Big) = 3x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

D. $\log\sqrt{1+x} = \dfrac{1}{2}\Big(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

問 4

Ⓐ $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

B. $2x\sin\dfrac{x}{2} = 2x\Big(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)\Big) = x^2 - \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

Ⓒ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

D. $\log\sqrt[6]{1-x} = \dfrac{1}{6}\Big(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)\Big) = -\dfrac{x}{6} - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^3}{18} - \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

2　レポート課題

[1]　$\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\left\{1-\dfrac{x}{2}+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right\} = \boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)}.$

《別法》 $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ のとき $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(2+x)^{n+1}}$ であるから，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$

[2]　まず，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1+\dfrac{-\frac{1}{2}}{1!}x+\dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2+o(x^2)=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+o(x^2).$　これを用いて，

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}}=\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)\right)\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)=\boxed{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^3+o(x^3)}.$$

[3]　$x\to 0$ のとき，$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}=\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$ において，分母は $x^2\sin^2 x=x^2(x+o(x))^2=x^4+o(x^4)$ となるから，分子 $\sin^2 x-x^2\cos^2 x$ に対する 4 次の漸近展開を計算すればよい:

$$\begin{aligned}\sin^2 x-x^2\cos^2 x&=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2-x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2\\&=\left(x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)-x^2(1-x^2+o(x^2))=\frac{2}{3}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

ここで，$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ と $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$，あるいは $\sin^2 x-x^2\cos^2 x=(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)$ を用いても上と同じ漸近展開が得られる．よって，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}+o(1)}{1+o(1)}=\boxed{\frac{2}{3}}.$$

[4]　部分積分法と置換積分法を用いて，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\cos x\,dx&=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\sin^3 x)'\,dx=\frac{1}{3}\Big[\,x\sin^3 x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx\\&=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-u^2)\,du\quad(\cos x=u\text{ とおいた})\\&=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\Big[\,u-\frac{u^3}{3}\,\Big]_0^1=\boxed{\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}}.\end{aligned}$$

3　演習問題

$\boxed{1}$ (本問でランダウの記号 $o(x^n)$ を使うときはいつも，$x\to 0$ が省略されている.)

(1)　(d) $(\alpha=-\frac{1}{2})$ を用いて，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\dfrac{-\frac{1}{2}}{1!}x+\dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2+o(x^2)=\boxed{1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2+o(x^2)}.$

(2)　(d) $(\alpha=\frac{1}{2})$ を用いて，$\sqrt{1+x}=1+\dfrac{\frac{1}{2}}{1!}x+\dfrac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2+o(x^2)=\boxed{1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+o(x^2)}.$

(3)　(a) より $e^{\pm x}=1\pm x+\dfrac{1}{2}x^2\pm\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4\pm\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5)$ (複号同順) であるから，

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\boxed{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)},\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\boxed{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)}.$$

(4)　(a) を用いて，$2^x=(e^{\log 2})^x=e^{(\log 2)x}=\boxed{1+(\log 2)x+\dfrac{(\log 2)^2}{2}x^2+o(x^2)}.$

(5)　(c) より，$\log(3+x)=\log 3+\log\left(1+\dfrac{x}{3}\right)=\log 3+\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+o(x^2)=\boxed{\log 3+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{18}x^2+o(x^2)}.$

(6)　部分分数分解した後に (d) $(\alpha=-1)$ を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{x}{2+x-x^2}&=\frac{x}{(2-x)(1+x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1+x}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right)-\left(1-x+x^2-x^3+o(x^3)\right)\right\}=\boxed{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{8}x^3+o(x^3)}.\end{aligned}$$

《別法》

$$\begin{aligned}\frac{x}{2+x-x^2}&=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+x}=\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right)\left(1-x+x^2+o(x^2)\right)\\&=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{3x^3}{8}+o(x^3).\end{aligned}$$

(7) (c) より, $\log(1\pm x) = \pm x - \dfrac{x^2}{2} \pm \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \pm \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$ (複号同順) であるから,

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\{\log(1+x) - \log(1-x)\} = \boxed{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}.$$

(8) (b) より, $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$. よって, $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \boxed{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} + \dfrac{x^4}{720} + o(x^4)}$.

(9) 半角の公式と (8) の結果を用いて,

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{\sin^2 x}{x^2} = 2\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2} = 2\left\{\frac{1}{2} - \frac{(2x)^2}{24} + \frac{(2x)^4}{720} + o(x^4)\right\} = \boxed{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{45} + o(x^4)}.$$

《別法》 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^2 = 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2x^4}{45} + o(x^4)$.

(10) (a), (b) を用いて, $e^{-x}\cos x = \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = \boxed{1 - x + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$.

(11) (b) より $\dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{1}{1 + (-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4))}$. ここで, $\dfrac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$ $(X \to 0)$ を用いて,

$$\frac{x}{\sin x} = 1 - \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)\right) + \left(-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)\right)^2 = \boxed{1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)}.$$

(12) $\cos x = 1 + \left(-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$ $(x \to 0)$, $e^{1+X} = e\cdot e^X = e\left(1 + X + \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)\right)$ $(X \to 0)$ より,

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\right\} \\ &= e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\right\} + o(x^4) = \boxed{e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)}. \end{aligned}$$

(13) $\mathrm{Tan}^{-1}\, x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 + o(t^4)\right) dt = \boxed{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}$.

(14) (1) の結果を用いて, $\mathrm{Sin}^{-1}\, x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(1 - \frac{-t^2}{2} + \frac{3(-t^2)^2}{8} + o(t^4)\right) dt = \boxed{x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)}$.

2 (1) (i) 分母 $x(1-\cos x)$ の漸近展開は x^3 の項から始まるから, 分子を $o(x^3)$ を用いて表せばよい.

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+x) - x\sqrt{1-x}}{x(1-\cos x)} &= \frac{(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - x(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2))}{x(1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))} \\ &= \frac{\frac{11}{24}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = \frac{\frac{11}{12} + o(1)}{1 + o(1)} \to \boxed{\frac{11}{12}} \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

(ii) 対数をとって考える. $\log\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{\log\frac{\sin x}{x}}{x^2}$ において, 分母が x^2 だから, 分子を $o(x^2)$ を用いて表す:

$$\log\frac{\sin x}{x} = \log\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \log\left(1 + \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right) = \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{6}$ となり, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \boxed{e^{-1/6}}$.

(2) $x \neq 0$ のとき $x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}} = x\left(\dfrac{3}{x} - 1\right)^{\frac{2}{3}} = x\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ と変形できる. ここで, $t = -3/x$ と考え, $t \to 0$ において $(1+t)^{\frac{2}{3}}$ を漸近展開すると, (d) $(\alpha = \frac{2}{3})$ より, $(1+t)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{2}\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})t^2 + o(t^2) = 1 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2)$. よって,

$$x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}} = x\left\{1 + \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{x}\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{3}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} = x - 2 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to \pm\infty).$$

これより, $y = x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}$ の $x \to \pm\infty$ での漸近線は $\boxed{y = x - 2}$ であることが分かる.

(3) $\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)$ であるから, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e\cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)} = e\left\{1 + \left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right\} = e - \dfrac{e}{2}x + \dfrac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$. 故に, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \boxed{e - \dfrac{e}{2n} + \dfrac{11e}{24n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$ $(n \to \infty)$. 同様にして, $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n} = e + \dfrac{e}{2n} + \dfrac{11e}{24n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ $(n \to \infty)$.

3 (1) (前半の不定積分に対する積分定数は省略する.)

(i) 被積分関数を部分分数分解して,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dt = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+1}}.$$

(ii) 部分積分法により,

$$\int x^2\log x\,dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3\log x}{3} - \int\frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3\log x}{3} - \frac{x^3}{9} = \boxed{\frac{x^3}{9}(3\log x - 1)}.$$

(iii) $x^2 = t$ とおけば $x\,dx = \dfrac{dt}{2}$ であるから,

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \int te^{-t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left(-te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right) = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t} = \boxed{-\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}}.$$

(iv) $\cos x = t$ とおけば $-\sin x\,dx = dt$ であるから,

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int\frac{-dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\left(= \frac{1}{2}\log\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \boxed{\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|}\right).$$

(v) 部分積分法により,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx = \Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \frac{\pi^2}{4} + 2\Big[x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2}.$$

(vi) 部分積分法により, $I := \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx = \Big[-e^{-x}\sin x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx = \Big[-e^{-x}\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-x}(-\sin x)\,dx = 1 + e^{-\pi} - I$. よって, $I = \boxed{\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}}$.

(vii) $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x + \cos x|\,dx = \int_0^{\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin x|\,dx$

$$= \sqrt{2}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}(-\sin x)\,dx\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}\left\{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)\right\} = \boxed{2\sqrt{2}}.$$

《別法》 $|\sin x|$ は周期 π の関数であるから, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}|\sin x|\,dx = \int_0^{\pi}\sin x\,dx = 2.$

(viii) $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\,\cos nx\,dx$ とおく (m, n は自然数). $m = n$ のとき, $I_{n,n} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin 2nx\,dx = \left[-\frac{\cos 2nx}{2n}\right]_0^{\pi} = 0$. また, $m \neq n$ のときは, 三角関数の積和の公式を用いて,

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1-(-1)^{m+n}}{m+n} + \frac{1-(-1)^{m-n}}{m-n}\right\} = \boxed{\begin{cases} 0 & (m+n\text{ が偶数}) \\ \frac{2m}{m^2-n^2} & (m+n\text{ が奇数}) \end{cases}}.$$

$m = n$ なら $m+n$ は偶数となるので, $m = n$ の場合も含めて $I_{m,n}$ は, 上の枠内で与えられる.

(2) (i) 連続関数 $h(x)$, 定数 c に対し, $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_c^x h(t)\,dt = h(x)$ (微積分の基本定理) が成り立つことに注意する.

$F'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt\right) = \int_0^x f(t)\,dt + x\cdot f(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $F''(x) = \boxed{f(x)}$.

(ii) $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ とおけば, $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t)\,dt = \dfrac{G(x^2) - G(\sqrt{x})}{x-1}$ ($x \to 0$ のとき $\dfrac{0}{0}$ 型の不定形) であるから, ロピタルの定理 (あるいは微分の定義) により,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(t)\,dt = \lim_{x\to 1}\frac{G(x^2) - G(\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left\{2xG'(x^2) - \frac{G'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\right\} = \boxed{\frac{3}{2}f(1)}.$$