

数学演習第一 (演習第 10 回) 【解答例】

線形：4 次以上の行列式 2021 年 7 月 14 日

1 小テスト問題

問 1
$$\begin{vmatrix} a \\ -2b \\ 3d \\ -c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a \\ -2b \\ -c \\ 3d \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = -6|A| = \boxed{12}. \quad \text{正解は C.}$$

問 2
$$\begin{vmatrix} 2a \\ 3b \\ -5a+4c \\ 6b+5d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a \\ 3b \\ 4c \\ 5d \end{vmatrix} = 120 \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 120|A| = \boxed{-120}. \quad \text{正解は A.}$$

問 3 $|{}^tA| = |A| = \boxed{-4}. \quad \text{正解は B.}$

問 4 $|3AB^{-1}| = 3^4|A||B^{-1}| = \frac{81|A|}{|B|} = \frac{81 \cdot 2}{3} = \boxed{54}. \quad \text{正解は D.}$

2 レポート課題 (オンライン提出)

(1)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = \boxed{-4}.$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & 5 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & 18 & 22 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & 18 & 22 \end{vmatrix} \\ = -20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 11 & 10 \\ 11 & 18 & 22 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & 11 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = \boxed{-620}.$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & -21 & 17 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 11 & 10 & -8 \\ 0 & -17 & -40 & 31 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -9 & -21 & 17 \\ 11 & 10 & -8 \\ -17 & -40 & 31 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} -9 & -21 & 17 \\ 11 & 10 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -3 & -10 \\ 0 & -12 & 25 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -12 & 25 \end{vmatrix} = \boxed{195}.$$

(4) $|A_{11}| = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad |A_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -12, \quad |A_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -37,$

$|A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24, \quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14, \quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11,$

$|A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -20, \quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10, \quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 20$

であるので, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 12 & -37 \\ 24 & -14 & -11 \\ -20 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$

3 演習問題

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 96.$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 12 & 13 & 1 & 5 \\ 11 & 16 & -1 & 6 \\ 10 & 9 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 11 & 11 & 0 & 1 \\ 12 & 18 & 0 & 10 \\ 11 & 11 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 11 & 11 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & 11 & 1 \\ 12 & 18 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 18 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 660.$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 32 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -128.$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ -5 & 11 & -9 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -5 & 11 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ -5 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 21 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -42.$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad |dE| = d^n |E| = d^n.$$

(2) 恒等式 $A\tilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって $|A\tilde{A}| = ||A|E|$. これより, $|A|\tilde{A}| = |A|^n$. 両辺を 0 でない“多項式” $|A|$ で割り算して, $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$. ($A = [a_{ij}]$ とすると, \tilde{A} の各成分は n^2 個の変数 a_{ij} の多項式で, $|A|, |\tilde{A}|$ とともに, n^2 個の変数 a_{ij} の多項式である. よって, 上記のように, $|\tilde{A}|$ と $|A|^{n-1}$ は, まず n^2 個の変数 a_{ij} の多項式として等しいことがわかり, 従って, n^2 個の変数 a_{ij} にどんな値をいれても等しいことがわかる.)

【別法】 A が正則なら, $|A|\tilde{A}| = |A|^n$ を $|A| \neq 0$ で割って, $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$. A が正則でないとき, \tilde{A} が正則と仮定すれば, $A\tilde{A} = |A|E = 0$ より $A = O$. このとき, 定義より $\tilde{A} = O$ となり, \tilde{A} の仮定に反する. よって, $|A| = 0 \Rightarrow |\tilde{A}| = 0$ となるので, この場合も含めて, $|\tilde{A}| = |A|^{n-1}$ が成立する.

$$\boxed{3} \quad \text{関係式 } wa + xb + yc + zd = te \text{ は } w, x, y, z \text{ を変数とする連立1次方程式 } \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = te \text{ と}$$

見なせるので, クラメル公式より,

$$w = \frac{|te \ b \ c \ d|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{t|e \ b \ c \ d|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{9t}{3} = 3t,$$

$$x = \frac{|a \ te \ c \ d|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{3t}{3} = t, \quad y = \frac{|a \ b \ te \ d|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{-6t}{3} = -2t, \quad z = \frac{|a \ b \ c \ te|}{|a \ b \ c \ d|} = \frac{6t}{3} = 2t.$$

4 (1) $|P_2| = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{vmatrix} = 1$ である. $n \geq 2$ なる自然数に対し, $\begin{vmatrix} P_n' \\ P_n \end{vmatrix} = |P_n| = 1$ と仮定すると,

$$|P_{n+1}| = \begin{vmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \mathbf{0} & \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_n' & \mathbf{0} \\ P_n & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{vmatrix} |P_n| = 1 \cdot 1 = 1$$

となる. 故に, 数学的帰納法により $n \geq 2$ なる自然数に対し $|P_n| = 1$ である. 特に $|P_4| = 1$.

【補足】 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta_1 \\ r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \vdots \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{bmatrix}$ を n 次元での極座標変換とし, $n \geq 2$

に対し, $\tilde{x}_{n-1} = r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2}$ とするとき, $x_{n-1} = \tilde{x}_{n-1} \cos \theta_{n-1}$, $x_n = \tilde{x}_{n-1} \sin \theta_{n-1}$ だから,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ dx_{n-1} \\ dx_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ \cos \theta_{n-1} d\tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}_{n-1} \sin \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \\ \sin \theta_{n-1} d\tilde{x}_{n-1} + \tilde{x}_{n-1} \cos \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_{n-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos \theta_{n-1} & -\sin \theta_{n-1} \\ \mathbf{0} & \sin \theta_{n-1} & \cos \theta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ d\tilde{x}_{n-1} \\ \tilde{x}_{n-1} d\theta_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= P_n \begin{bmatrix} dr \\ r d\theta_1 \\ \vdots \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-3} d\theta_{n-2} \\ r \sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

という形で P_n は現れる. (dx_i や dr , $d\theta_i$ などは後期の微分積分学第二で学ぶ (全) 微分である.) 最後の等号は帰納的にわかるものであり, $\tilde{x}_1 = r$ に注意する.)

(2) 求める行列式は x の多項式となるので $f_n(x)$ とおく. 第 1 行に関して余因子展開し, $f_n(x) = (x^2 + 1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x)$ を得る. $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$ より, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k}$ であると予想される. これを数学的帰納法により示そう. $n \leq 2$ のとき, 確かに成り立つ. $n \geq 3$ のとき, $f_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}$, $f_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k}$ であるとすれば (帰納法の仮定),

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^2 + 1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x) = (x^2 + 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + x^2 \cdot x^{2(n-1)} = \sum_{k=0}^n x^{2k} \end{aligned}$$

より n のときも確かに成り立つ. 故に, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k} = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \cdots + x^2 + 1$.