

## 数学演習第一 演習第 11 回

### 微積：積分の計算 (2)

2021 年 7 月 21 日 実施

#### 要点

I. 基本的な不定積分. 以下, 積分定数  $C$  は省略する.

$$(1) (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ なので, } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x.$$

$$(2) (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \text{ なので, } \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x.$$

$$(3) a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき, } (a^x)' = a^x \log a \Leftrightarrow \left(\frac{a^x}{\log a}\right)' = a^x \text{ なので, } \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}.$$

$$(4) a \neq 0 \text{ のとき, } \{\log|x + \sqrt{x^2 + a}|\}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \text{ より, } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \log|x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

あるいは  $\sqrt{x^2 + a} = t - x$  として置換積分する (1)(3)).

II. 有理式  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  ( $p(x), q(x)$  は  $x$  の多項式) の積分. 部分分数分解してから積分する (微積教科書 p.62). 例えば,

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+1} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right\}$$

なので,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \log|x+1| - \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \tan^{-1} x.$$

III. 無理関数を含む関数  $f(x)$  の積分.  $f(x)$  が  $x$  と  $\sqrt[n]{ax+b}$  ( $a \neq 0$ ) の有理式するとき,  $t = \sqrt[n]{ax+b}$  として置換積分する (微積教科書 p.63). 例えば,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} \stackrel{(t=\sqrt{1-x})}{=} \int \frac{-2t dt}{(1-t^2)t} = \int \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \log \left| \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right|.$$

IV. 三角関数の有理式の積分.  $u = \tan \frac{x}{2}$  として置換積分する. 例えば,

$$\int \frac{dx}{\sin x} \stackrel{(u=\tan \frac{x}{2})}{=} \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2du}{1+u^2} = \log|u| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$$

**【注】**  $u = \tan \frac{x}{2}$  のとき,  $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ,  $dx = \frac{2 du}{1+u^2}$ .

V. 定積分の計算 (微積教科書 p.57).  $f(x)$  が  $[a, b]$  で連続とする.  $f(x)$  の  $[a, b]$  における不定積分 (の 1 つ) を  $F(x)$  とすると,  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$  となる.

## 1 小テスト問題 (オンライン受験)

問1 定積分  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  の値は？

〈 選択肢 : A.  $\frac{\pi}{6}$  B.  $\frac{\pi}{4}$  C.  $\frac{\pi}{3}$  D.  $\frac{\pi}{2}$  〉

問2 定積分  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$  の値は？

〈 選択肢 : A.  $\frac{\pi}{6}$  B.  $\frac{\pi}{4}$  C.  $\frac{\pi}{3}$  D.  $\frac{\pi}{2}$  〉

問3 定積分  $\int_0^1 2^x dx$  の値は？

〈 選択肢 : A.  $(\log 2)^{-1}$  B. 1 C.  $\log 2$  D.  $(\log 2)^2$  〉

問4 定積分  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$  の値は？

〈 選択肢 : A.  $\frac{1}{2} \log 2$  B.  $\log 2$  C. 1 D.  $\log(1+\sqrt{2})$  〉

## 2 レポート課題 (オンライン提出)

問題1 【逆三角関数に関する積分】 定積分  $I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  の値を求めよ.

問題2 【有理式の積分】 定積分  $J = \int_0^1 \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} dx$  の値を求めよ.

ヒント : まず,  $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$  の形で表す.

問題3 【無理関数を含む関数の積分】 定積分  $K = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$  の値を求めよ.

ヒント :  $\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{1+(\sqrt[4]{x})^2}$  とみて,  $t = \sqrt[4]{x}$  として置換積分する.

問題4 【三角関数の有理式の積分】 定積分  $L = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$  の値を求めよ.

ヒント :  $u = \tan \frac{x}{2}$  として置換積分する.

### 3 演習問題 (自習用問題)

**1** (一部は演習書 例題 4.1 問題 4.1.1)

次の不定積分を求めよ. ただし,  $a > 0$ ,  $A \neq 0$  (定数) とする.

$$(1) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad (2) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (3) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} \quad (4) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$(5) \int \sqrt{x^2 + A} dx \quad (6) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (7) \int \sin^{-1} x dx \quad (8) \int \tan^{-1} x dx$$

**2** 次の有理関数の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{x+1}{x^2+2x-63} dx \quad (2) \int \frac{dx}{x^4-16} \quad (3) \int \frac{2x^2+1}{x^2+2} dx$$

$$(4) \int \frac{3x^3+x}{x^2+3} dx \quad (5) \int \frac{x^2+2}{x^4+4} dx \quad (6) \int \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2} dx$$

**3** (一部は演習書 問題 4.3.1) 次の無理関数の不定積分を求めよ. ただし,  $a > 0$  とする.

$$(1) \int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx \quad (2) \int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx \quad (3) \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ヒント: (3) は  $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$  として置換積分する.

**4** (一部は演習書 問題 4.3.2) 次の三角関数の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \sin^4 x dx \quad (2) \int \frac{dx}{4+3\cos x} \quad (3) \int \frac{dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$$

ヒント: (3) は  $u = \tan x$  として置換積分する.

**5** 次の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_1^2 \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}} \quad (2) \int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx \quad (3) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\sin x}$$

**6** (一部は演習書 問題 4.4.11) 以下の問いに答えよ.

(1)  $p > 0$  に対して広義積分  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^p}$  の収束・発散を調べよ.

(2) 円板  $(x-a)^2 + y^2 \leq b^2$  ( $a > b > 0$ ) を  $y$  軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積  $V$  を求めよ.

(3) 曲線:  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  の長さ  $L$  を求めよ.