数学演習第一

高校数学の復習, 大学数学への準備［1］

2021 年 4 月 14 日

1　小テスト問題（オンライン受験）

問 1　正数 a, b に対して, $\sqrt{a^3b^{-3}} \times \sqrt[3]{a^{-2}b^2} \times \sqrt[6]{ab^5}$ を整理すると？
〈選択肢: **1**. 1　**2**. a　**3**. b　**4**. ab〉

問 2　複素数 $(\sqrt{3}+i)^{-3}$ の虚部は？
〈選択肢: **1**. $1/8$　**2**. $-1/8$　**3**. $i/8$　**4**. $-i/8$〉

問 3　100 以下の自然数の中で, 2 で割り切れるが, 3 でも 5 でも割り切れない数の個数は？
〈選択肢: **1**. 23　**2**. 25　**3**. 27　**4**. 29〉

問 4　5 つの実数 3, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, e, π を小さい順に並べたものを $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ とするとき, $a_n + 0.1 < a_{n+1}$ となる n は？（すべて選べ）
〈選択肢: **1**. 1　**2**. 2　**3**. 3　**4**. 4〉

2　レポート課題（オンライン提出）

問題 1

次の文字を手書きせよ. (最後のページの書き方に倣え)

(1) 数の集合の記号: $\mathbb{N}$ (自然数全体), $\mathbb{Z}$ (整数全体), $\mathbb{Q}$ (有理数全体), $\mathbb{R}$ (実数全体), $\mathbb{C}$ (複素数全体).
（最後のページの「太字アルファベット (大文字)」をまねる）

(2) ギリシャ文字の小文字: α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, o, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω.
（上記の形のみでよい（「やわらかい」形).「ほとんど使わない」は省略してもよい.）

問題 2

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を既知として次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$ を導き, 加法定理を用いて, $\sin x$, $\cos x$ の導関数を定義に従って計算せよ.

(2) 和積の公式を用いて, $\sin x$, $\cos x$ の導関数を定義に従って計算せよ.

3　演習問題（提出不要だが必ず解いてみよう）

$\boxed{1}$【三角関数の問題】

(1) 次の三角関数の値の表を完成せよ．(右図は $-\pi \leqq x \leqq \pi$ でのグラフ)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$									
$\cos x$									
$\tan x$									

(2) 三角関数の基本公式

$$\begin{aligned}
&\sin(-x) = -\sin x, && \cos(-x) = \cos x && \text{(偶奇性)}\\
&\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin x, && \cos(x+n\pi) = (-1)^n \cos x \quad (n \in \mathbb{Z}) && \text{(反周期性, 周期性)}\\
&\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x, && \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x && \text{(余角の公式)}
\end{aligned}$$

を用いて，$m = 2k,\ 2k+1\ (k \in \mathbb{Z})$ のそれぞれの場合について, $\sin\left(\frac{m\pi}{2} \pm x\right)$, $\cos\left(\frac{m\pi}{2} \pm x\right)$ を $\sin x$, $\cos x$ (および k) を用いて表せ.

(3) $\sin(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$ を $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ を用いて表せ (**加法定理**).

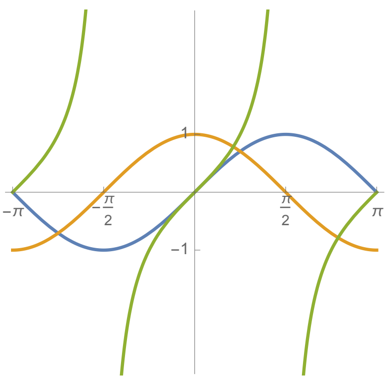
(4) (3) で得られる式の和や差をとることで，$(\sin x \text{ or } \cos x) \times (\sin y \text{ or } \cos y)$ (4 種類の積) を, $\sin(x \pm y)$ または $\cos(x \pm y)$ を用いて表せ (**積和の公式**).

(5) (4) で得られる式で, $X = x + y$, $Y = x - y$ とおくことにより, $\sin X \pm \sin Y$, $\cos X \pm \cos Y$ を三角関数の積の形で表せ (**和積の公式**).

(6) a, b は 0 と異なる実数の定数とする．このとき,

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x+\alpha) = r\cos(x+\beta) \quad (x \text{ の関数としての等式})$$

を満たす定数 $r > 0$, $\alpha, \beta \in (\pi, \pi]$ がそれぞれ一意に定まることを示せ.



2 【指数・対数の問題】

(1) $\log_{10} 2$ はどのようにして定まる数か？ (指数を用いて説明せよ)

(2) 2^{10} を計算することにより $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3$ であることを説明せよ.

(3) $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.301$ であることが知られている. これを利用して, 現在確認されている最大の素数 $2^{82589933} - 1$ の桁数を最初の 3 桁までの概数で答えよ.

(4) $n \geqq 2$ のとき, $(1+x)^n > 1 + nx \ \ (x \in [-1, 0) \cup (0, \infty))$ が成り立つことを n に関する数学的帰納法を用いて示せ. 更に, $a_m = (1 + 1/m)^m \ (m \in \underbrace{\mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}}_{\mathbb{Z}\text{ から }0,-1\text{ を除いた集合}})$ とおくとき,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n < \cdots, \quad \cdots < a_{-(n+1)} < a_{-n} < \cdots < a_{-3} < a_{-2}$$

および $a_n < a_{-(n+1)}$ が成り立つことを示せ. (**ヒント**：最初の不等式を用いて, $\dfrac{e_n}{e_{n-1}} > 1$, $\dfrac{e_{-n}}{e_{-(n+1)}} > 1$ を示す).

(5) 前問の結果より, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (自然対数の底 e の定義) が存在する. これより $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e}$ が導かれる. これを用いて, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ を示せ.

(6) (5) の結果を用いて, $\log x \ (x > 0)$ および e^x の導関数を定義に従って計算せよ.

3 【無限大の比較】

正数列 (正の数の数列) $\{p_n\}, \{q_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = 0$ であることを $p_n \ll q_n \ (n \to \infty)$ と表す. このとき, 自然数 k, ℓ, および 1 より大きい実数 a, b に対して

$$1 \ll (\log_b n)^\ell \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. これを次の指示に従って示せ.

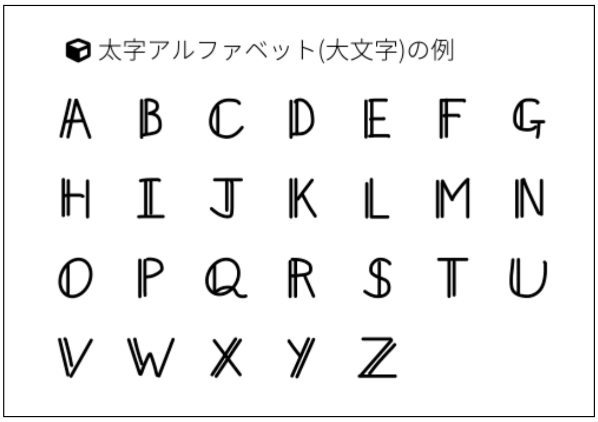
(1) 2 項定理 (2 項展開) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ を思い出そう. ここで, $\binom{n}{k}$ は 2 項係数を表す: $\displaystyle\binom{n}{k} := {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. (余裕があったら, n に関する数学的帰納法で証明してみよ.)
$h = a - 1 > 0$ とおくとき, 2 項定理を用いて, $a^n = (1+h)^n \geqq \displaystyle\binom{n}{k+1}h^{k+1} \ \ (n \geqq k+1)$ が成り立つことを示せ. 更に, この不等式から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$ を導け. ([演習] 問題 1.2.1 改)

(2) 実数 x に対し, x 以下の最大の整数を $\lfloor x \rfloor \ (= [x])$ と表す ([演習] p.20 参照, $\overset{\text{floor}}{\text{床}}$ 関数). $m = \lfloor \log_b n \rfloor$ とおくとき, $b^m \leqq n < b^{m+1}$ を示せ. 更に, (1) の結果を用いて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\log_b n)^\ell}{n^k} = 0$ を示せ.

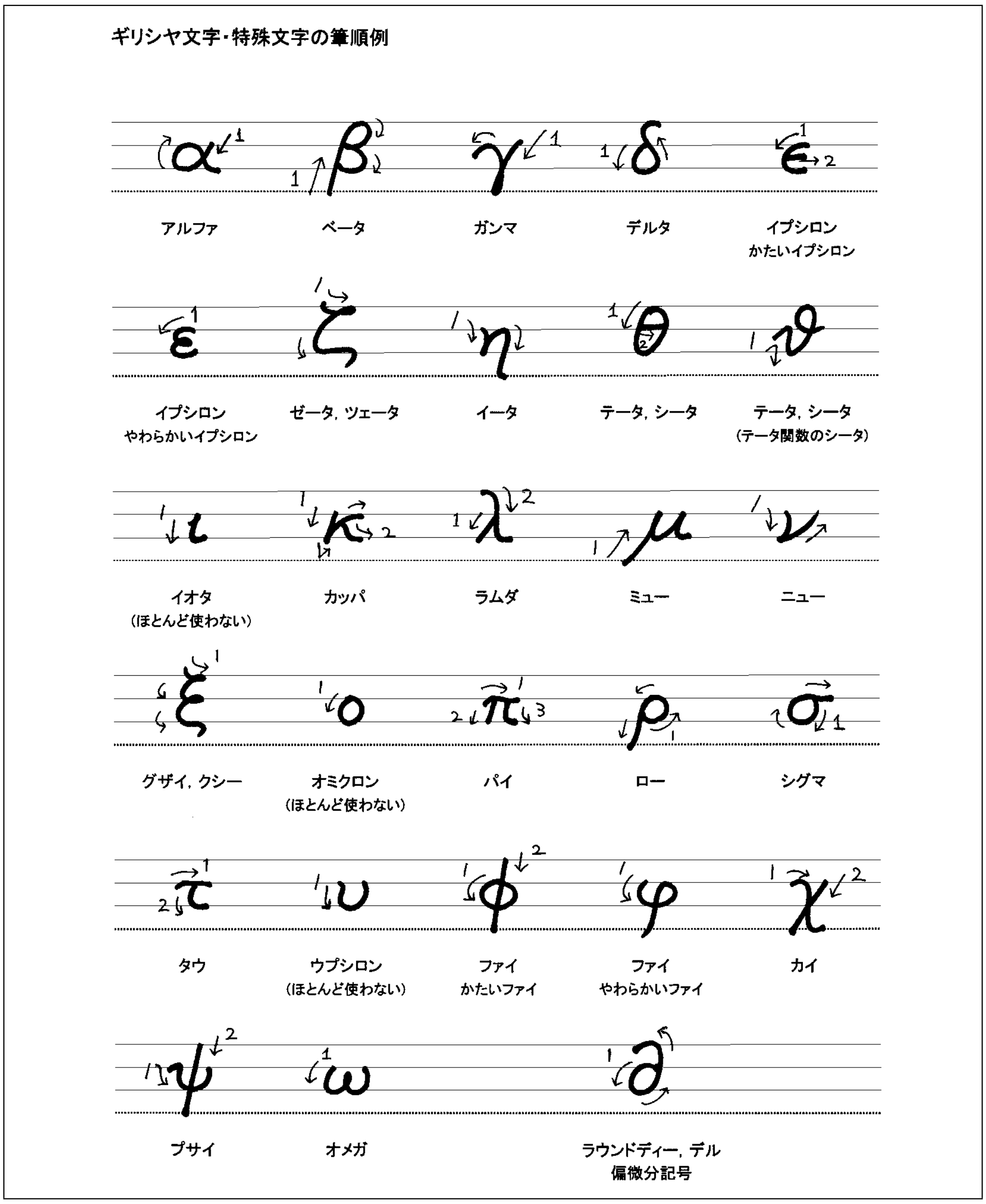
(3) $p > a$ なる自然数 p (例えば $p = \lfloor a \rfloor + 1$) を選び, $\displaystyle\frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{p}\right)\cdot\left(\frac{a}{p+1}\frac{a}{p+2}\cdots\frac{a}{n}\right)$ と表して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ を示せ.

(4) $\displaystyle\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}\right)$ と表して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$ を示せ.

参考　【手書き文字】



https://physnotes.jp/foundations/b_al/



http://kscalar.kj.yamagata-u.ac.jp/~endo/greek/orthographic.html