数学演習第一

高校数学の復習, 大学数学への準備［2］

2021 年 4 月 21 日

1　小テスト問題（オンライン受験）

問 1　極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\sin\frac{1}{x}$ は？

〈選択肢: A. 0　B. 1　C. ∞　D. 存在しない〉

問 2　関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}$ の $x=1$ における微分係数は？

〈選択肢: A. $-1/16$　B. $1/8$　C. $-3/16$　D. $3/4$〉

問 3　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ の値は？

〈選択肢: A. $1/16$　B. $1/8$　C. $3/16$　D. $3/4$〉

問 4　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ は？ (ヒント：区分求積法)

〈選択肢: A. 1　B. $\log 2$　C. $\log 3$　D. ∞〉

2　レポート課題（オンライン提出）

問題1　次ページの $\boxed{1}$【注】② の極限値を用いて, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ を求めよ.

問題2　曲線 $y = e^{-\frac{1}{x}}$ $(x \neq 0)$ の変曲点を求めよ.

問題3　関数 $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ の導関数と不定積分を計算せよ.

問題4　区間 $[0,a]$ の連続関数 $f(x)$ に対して, $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ が成り立つことを示し, これを利用して定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ を計算せよ.

3 演習問題（高校の復習として是非解いてみよう）

1 次の極限を求めよ. (下の【注】の事実を用いよ. 極限があるとは限らない.)

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)$ (2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (3) $\lim_{x\to +0} \sqrt{x}\log x$

(4) $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a^{n+1}$ (a は定数) (5) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n$ (6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x-3^{-x}}{2x}$

【注】① 正値関数 $f(x), g(x)$ に対して, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ であることを $f(x) \ll g(x)$ $(x\to\infty)$ と書けば,

$$a>1,\ b>1,\ p>0 \text{ が定数のとき,} \quad 1 \ll \log_b x \ll x^p \ll a^x \quad (x\to\infty).$$

② 三角関数, 指数・対数関数における最も基本的な極限値は

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

2 次の関数を微分せよ. (式を見やすい形に整理して答えること.)

(1) $y=\dfrac{(2x+1)^3}{(x-1)^2}$ (2) $y=x^2(\log x)^3$ (3) $y=\log(x+\sqrt{x^2-1}\,)$

(4) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ (5) $y=x^2\cdot 4^x$ (6) $y=x^{-x}$ (7) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$

(8) $y=\sin^3(2x+1)$ (9) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ (10) $y=\dfrac{1}{\tan x}$ (11) $y=\log|\cos x|$

【注】
- 積の導関数: $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- 商の導関数: $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}=f'(x)g(x)^{-1}+f(x)\{g(x)^{-1}\}'$
- 合成関数の微分法: $\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$
- 対数微分法: $\{\log|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (合成関数の微分法の一例, 本格的には大学で)

3 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)=\tan x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ は

$$f^{(n)}(x)=P_n(\tan x) \quad (P_n(t) \text{ は } t \text{ の } n+1 \text{ 次式})$$

の形に表されることを自然数 n に関する数学的帰納法を用いて示せ. ただし, $P_n(\tan x)$ は $P_n(t)$ に $t=\tan x$ を代入して得られる x の関数を表す.

(2) 多項式 $F(t)$ に対して,

$$\left\{F\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right\}''=G\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) \quad (\text{左辺は } F(\tfrac{1}{\sin^2 x}) \text{ の } x \text{ に関する 2 次導関数を表す})$$

を満たす多項式 $G(t)$ を $F'(t), F''(t)$ を用いて表せ.

4 次の問いに答えよ．(ここでの内容は数IIIの教科書に出ているが, 厳密な取扱いはこれから学ぶ.)

(1) 微分可能な関数 $y = f(x)$ が逆関数 $x = f^{-1}(y)$ をもつとき, $f^{-1}(y)$ も微分可能ならば, $f(f^{-1}(y)) = y$ を y で微分し, $f'(f^{-1}(y))\{f^{-1}(y)\}' = 1$ (合成関数の微分法)．よって,

$$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)} \qquad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)$$

が成り立つ．この事実を用いて, $y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $x = g(y)$ と表すとき, 導関数 $g'(y)$ を求めよ (微分可能性は仮定してよい).

(2) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ がともに微分可能で, $x = \varphi(t)$ が逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ をもつとする．このとき, $\varphi^{-1}(x)$ が微分可能ならば, $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ を x で微分して (合成関数の微分法),

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

が得られる．この事実を用いて, $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 < t < 2\pi)$ により y を x の関数とみるとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ (微分可能性は仮定してよい).

5 次の不定積分を計算せよ．(積分定数は省略してもよい.)

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^3}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{a^x}{a^x+1}\,dx$ (a は正定数)　　(5) $\displaystyle\int x\log(x+1)\,dx$　　(6) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

(7) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x\,dx$　　(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ $\left(\text{ヒント: } \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}\right)$

【注】
- 置換積分法: $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$ $(x = g(t))$, $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ $(u = g(x))$
- 部分積分法: $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

6 次の定積分を計算せよ．((2) の a, b は $a < b$ を満たす定数, (4) は極限値を求めよ)

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$　　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$　　(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$　　(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

7 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

【注】
- 区分求積法: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$ (最も単純な場合)
- $f(x)$ が $x \geqq 1$ で単調減少なら, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$