数学演習第一（高校復習 第２回）【解答例】

高校数学の復習, 大学数学への準備［２］

2021 年 4 月 21 日

1　小テスト問題

問 1　$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x| \to 0\ \ (x\to +0)$ より, $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\sin\frac{1}{x} = \boxed{0}$.

問 2　$f(x) = (x^2+x+2)^{-\frac{1}{2}}$ より, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2+x+2)^{-\frac{3}{2}}(2x+1)$. よって, $f'(1) = -\dfrac{1}{2}\cdot 4^{-\frac{3}{2}}\cdot 3 = \boxed{-\dfrac{3}{16}}$.

問 3　$x^2 = t$ とおけば $2x\,dx = dt$ より,

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int_0^1 (t+1)^{-3}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{-2}(t+1)^{-2}\,\Big]_0^1 = -\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{4}-1\Big) = \boxed{\frac{3}{16}}.$$

問 4　区分求積法により,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \boxed{\log 2}.$$

2　レポート課題

問題１　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ を用いて, $n\big(\sqrt[n]{2}-1\big) = \dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \dfrac{e^{\frac{\log 2}{n}}-1}{\frac{\log 2}{n}}\cdot\log 2 \xrightarrow{n\to\infty} \boxed{\log 2}$.

問題２　$y = e^{-\frac{1}{x}}\ \ (x\neq 0)$ より, $y' = e^{-\frac{1}{x}}\Big(-\dfrac{1}{x}\Big)' = \dfrac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}}$, $y'' = \dfrac{-2}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{1-2x}{x^4}\,e^{-\frac{1}{x}}$.

$y''=0$ となるのは $x = \dfrac{1}{2}$ のときで, y'' はその前後で正から負に符号を変える. よって, 変曲点は $\boxed{\Big(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{e^2}\Big)}$.

(下に凸から上に凸へ)

問題３　$f(x)$ の定義域は $-1<x<1$ ($\Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}>0$) である. $f(x) = \dfrac{1}{2}\{\log(1-x)-\log(1+x)\}$ と変形できるから,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\Big) = -\frac{1}{1-x^2} = \boxed{\frac{1}{x^2-1}}.$$

また, $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x(\log x-1)$ より, $f(x)$ の不定積分は

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\Big(\int\log(1-x)\,dx - \int\log(1+x)\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big\{(-1)(1-x)\Big(\log(1-x)-1\Big)-(1+x)\Big(\log(1+x)-1\Big)\Big\}+C\\ &= \boxed{-\frac{1}{2}\{(1-x)\log(1-x)+(1+x)\log(1+x)\}+C_1}\quad (C_1 \text{ は任意定数}).\end{aligned}$$

※ 真数に絶対値をつけても間違いではない.

あるいは, $\displaystyle\int f(x)\,dx = xf(x)-\int xf'(x)\,dx = x\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\int\frac{-x}{1-x^2}\,dx = \boxed{x\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\log\sqrt{1-x^2}+C}$.

問題４　まず, $a-x=t$ とおけば, $dx=-dt$ より,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(t)\,(-dt) = \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx.$$

この関係式を $f(x) = \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$, $a=\pi$ に適用して,

$$I := \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx = \int_0^\pi\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - I.$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \overset{\cos x=t}{=} \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2} \overset{t=\tan\theta}{=} \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

3　演習問題

1 (1) $\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)=\sqrt{n}\cdot\dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\xrightarrow{n\to\infty}\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

(2) 半角の公式を用いて, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{2}{4}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\xrightarrow{x\to 0}\boxed{\dfrac{1}{2}}$. あるいは分子分母に $1+\cos x$ を掛けて, $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x^2}=\dfrac{1}{1+\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\xrightarrow{x\to 0}\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とおけば, $x\to +0$ のとき $y\to\infty$ であるから, $\sqrt{x}\log x=\dfrac{1}{y}\log\dfrac{1}{y^2}=-\dfrac{2\log y}{y}\xrightarrow[x\to +0]{y\to\infty}\boxed{0}$. ここで, $\log y\ll y\;\;(y\to\infty)$ であることを用いた.

(4) まず, $a^{n+1}\;\;(n=1,2,\dots)$ は初項 a^2, 公比 a の等比数列であるから, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}a^{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a^2(1-a^N)}{1-a} & (a\neq 1),\\ N & (a=1).\end{cases}$

これより, $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a^{n+1}=\boxed{\begin{cases}\dfrac{a^2}{1-a} & (|a|<1),\\ \infty & (a\geqq 1),\\ \text{存在せず} & (a\leqq -1).\end{cases}}$

(5) $h=-\dfrac{1}{2n}$ とおけば, $n=-\dfrac{1}{2h}$ であり, $n\to\infty$ のとき $h\to -0$. よって,

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n=(1+h)^{-\frac{1}{2h}}=\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^{-\frac{1}{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{h\to -0}e^{-\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}.$$

(6) $\dfrac{3^x-3^{-x}}{2x}=\dfrac{3^{2x}-1}{2x}\cdot 3^{-x}=\dfrac{e^{2x\log 3}-1}{2x\log 3}\cdot 3^{-x}\log 3\xrightarrow{x\to 0}\boxed{\log 3}$.

2 (1) $y=(2x+1)^3(x-1)^{-2}$ と書いて,

$$\begin{aligned}y'&=6(2x+1)^2\cdot(x-1)^{-2}+(2x+1)^3\cdot(-2)(x-1)^{-3}\\&=(2x+1)^2(x-1)^{-3}\{6(x-1)-2(2x+1)\}=\boxed{\frac{2(x-4)(2x+1)^2}{(x-1)^3}}.\end{aligned}$$

商の導関数の公式を使ってもよいが, この問題では最後に「約分」操作が必要となる. 別の有効な方法として「対数微分法」にも言及しておく. $y=\dfrac{(2x+1)^3}{(x-1)^2}$ の両辺の絶対値をとり, 更に自然対数をとれば, $\log|y|=3\log|2x+1|-2\log|x-1|$. これを x で微分して, $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{6}{2x+1}-\dfrac{2}{x-1}$. これより,

$$y'=y\cdot 2\left(\frac{3}{2x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{(2x+1)^3}{(x-1)^2}\cdot\frac{2(x-4)}{(2x+1)(x-1)}=\boxed{\frac{2(x-4)(2x+1)^2}{(x-1)^3}}.$$

(2) $y'=2x(\log x)^3+x^2\cdot\dfrac{3(\log x)^2}{x}=2x(\log x)^3+3x(\log x)^2=\boxed{x(2\log x+3)(\log x)^2}$.

(3) 合成関数の微分法により, $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$.

(4) $y=1-\dfrac{2}{e^x+1}$ より, $y'=\dfrac{2}{(e^x+1)^2}\cdot e^x=\boxed{\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}}$.

(5) $y'=2x\cdot 4^x+x^2\cdot 4^x\log 4=\boxed{2x(x\log 2+1)\,4^x}$.

(6) 両辺の対数をとり, $\log y=-x\log x$. これより, $\dfrac{y'}{y}=-(\log x+1)$, すなわち $y'=\boxed{-x^{-x}(\log x+1)}$.

(7) $y'=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{2}{x^3}=\boxed{\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}$.　　(8) $y'=3\sin^2(2x+1)\cdot\cos(2x+1)\cdot 2=\boxed{6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)}$.

(9) $y' = \dfrac{(-\sin x)(1+\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \dfrac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} = \boxed{-\dfrac{1}{1+\sin x}}$.

(10) $y' = -\dfrac{1}{\tan^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \boxed{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$. (11) $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = \boxed{-\tan x}$.

3 (1) $n = 1$ のとき, $f'(x) = (\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ であるから, $P_1(t) = 1 + t^2$ (2 次式) とおいて, $f'(x) = P_1(\tan x)$ が成り立つ. $n \geqslant 2$ のとき, $f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(\tan x)$ ($P_{n-1}(t)$ は n 次式) と表されると仮定すれば, 両辺を x で微分して, $f^{(n)}(x) = P'_{n-1}(\tan x)\,(\tan x)' = (1+\tan^2 x)P'_{n-1}(\tan x)$. よって, $P_n(t) = (1+t^2)P'_{n-1}(t)$ とおけば, $P_n(t)$ は $n+1$ 次式であり, $f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$ が成り立つ. 以上から, 数学的帰納法により, すべての自然数 n に対して主張が正しいことが分かる.

(2) 合成関数の微分公式により,

$$\begin{aligned}
\{F(\tfrac{1}{\sin^2 x})\}' &= F'(\tfrac{1}{\sin^2 x})\,(\tfrac{1}{\sin^2 x})' = -\tfrac{2\cos x}{\sin^3 x}F'(\tfrac{1}{\sin^2 x}),\\
\{F(\tfrac{1}{\sin^2 x})\}'' &= (\tfrac{2}{\sin^2 x} + \tfrac{6\cos^2 x}{\sin^4 x})F'(\tfrac{1}{\sin^2 x}) + (-\tfrac{2\cos x}{\sin^3 x})^2 F''(\tfrac{1}{\sin^2 x})\\
&= (\tfrac{2}{\sin^2 x} + \tfrac{6(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x})F'(\tfrac{1}{\sin^2 x}) + \tfrac{4(1-\sin^2 x)}{\sin^6 x}F''(\tfrac{1}{\sin^2 x})\\
&= 2(\tfrac{3}{\sin^4 x} - \tfrac{2}{\sin^2 x})F'(\tfrac{1}{\sin^2 x}) + 4(\tfrac{1}{\sin^6 x} - \tfrac{1}{\sin^4 x})F''(\tfrac{1}{\sin^2 x}).
\end{aligned}$$

よって, $G(t) := 2t(3t-2)F'(t) + 4t^2(t-1)F''(t)$ と定めれば, $\{F(\tfrac{1}{\sin^2 x})\}'' = G(\tfrac{1}{\sin^2 x})$ が成り立つ.

4 (1) $y = \sin x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数が $x = g(y)$ であるから,

$$g'(y) = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}.$$

(2) $x = \varphi(t) := t - \sin t$, $y = \varphi(t) := 1 - \cos t$ とおけば,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \boxed{\frac{\sin t}{1-\cos t}} = \frac{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \boxed{\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}}.$$

5 以下では, 積分定数は省略する.

(1) (与式) $= \displaystyle\int (2x+1)^{-3}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-2}(2x+1)^{-2}\} = \boxed{-\frac{1}{4(2x+1)^2}}$.

(2) (与式) $= \displaystyle\int \frac{(x-1)+2}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int \left\{(x-1)^{\frac{1}{2}} + 2(x-1)^{-\frac{1}{2}}\right\}dx = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2\cdot 2(x-1)^{\frac{1}{2}}$

$= \boxed{\dfrac{2}{3}(x+5)\sqrt{x-1}}$.

あるいは, $u = \sqrt{x-1}$ とおけば, $x = u^2+1$, $dx = 2u\,du$ となるので,

$$(与式) = \int \frac{(u^2+1)+1}{u}\cdot 2u\,du = 2\int (u^2+2)\,du = \frac{2}{3}\,(u^2+6)u = \boxed{\frac{2}{3}(x+5)\sqrt{x-1}}.$$

(3) (与式) $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{-x^2}(x^2)'\,dx = \boxed{-\frac{1}{2}e^{-x^2}}$.

(4) (与式) $= \displaystyle\int \frac{\frac{1}{\log a}(a^x+1)'}{a^x+1}\,dx = \boxed{\frac{\log(a^x+1)}{\log a}} = \boxed{\log_a(a^x+1)}$.

(5) まず, 被積分関数の定義域は $x > -1$ であることに注意する. 部分積分法を用いて,

$$\begin{aligned}
(与式) &= \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx\\
&= \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{2} - x + \log(x+1)\right\} = \boxed{-\frac{1}{4}x(x-2) + \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)}.
\end{aligned}$$

(6) (与式) $= \displaystyle\int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)(\cos x)'\,dx = -\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}(\cos^3 x - 3\cos x)}$.

あるいは, 3 倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ を用いて, $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ であるから,

$$(\text{与式}) = \frac{1}{4}\int(3\sin x - \sin 3x)\,dx = \frac{1}{4}\left(-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{12}(\cos 3x - 9\cos x)}.$$

(7) 積和の公式を用いて, $(\text{与式}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\sin 5x + \sin x)\,dx = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\cos 5x}{5} - \cos x\right) = \boxed{-\dfrac{1}{10}(5\cos x + \cos 5x)}.$

(8) ヒントに従って計算し, $u = \sin x$ とおけば,

$$(\text{与式}) = \int\frac{(\sin x)'\,dx}{1-\sin^2 x} = \int\frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

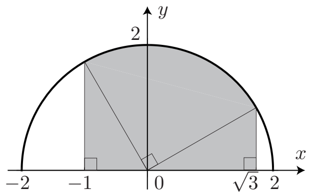
6 (1) $(\text{与式}) = \left[-\dfrac{1}{5}(1-x)^5\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{1}{5}}$. $1 - x = u$ で置換してもよい.

(2) 部分積分を用いる.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3(x-b)^2\right]_a^b - \frac{2}{3}\int_a^b(x-a)^3(x-b)\,dx \\ &= -\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{1}{4}(x-a)^4(x-b)\right]_a^b - \frac{1}{4}\int(x-a)^4\,dx\right\} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{5}(x-a)^5\right]_a^b = \boxed{\frac{1}{30}(b-a)^5}.\end{aligned}$$

(3) $x = 2\cos\theta$ とおけば, $dx = -2\sin\theta\,d\theta$ であり, $x = -1 \to \sqrt{3}$ は $\theta = \dfrac{2\pi}{3} \to \dfrac{\pi}{6}$ に対応する. よって,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4(1-\cos^2\theta)}\,(-2\sin\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}4\sin^2\theta\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}2(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \Big[2\theta - \sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} = \boxed{\pi + \sqrt{3}}.\end{aligned}$$



あるいは, 右図の面積に注目し, $(\text{与式}) = \dfrac{4\pi}{4} + 2\cdot\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = \boxed{\pi + \sqrt{3}}.$

(4) $\displaystyle\int_a^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \Big[2\sqrt{x}\,\log x\Big]_a^1 - \int_a^1 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -2\sqrt{a}\,\log a - \Big[4\sqrt{x}\Big]_a^1 = -2\sqrt{a}\,\log a - 4(1-\sqrt{a})$. ここで, $\boxed{1}$(3) より $\displaystyle\lim_{a\to+0}\sqrt{a}\,\log a = 0$ であったから, $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = \boxed{-4}.$

(5) 部分積分を用いる. $(\text{与式}) = \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi\cos x\,dx = \pi + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \boxed{\pi}.$

(6) $(\text{与式}) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{-(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \Big[-\log(\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\log\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \log\sqrt{3} = \boxed{\frac{1}{2}\log 3}.$

(7) $\sin^2 x\cos^3 x = \sin^2 x(1-\sin^2 x)(\sin x)'$ に注意して, $u = \sin x$ とおけば, $du = \cos x\,dx$ で, $x = 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ は $u = 0 \to 1$ に対応する. よって, $(\text{与式}) = \displaystyle\int_0^1 u^2(1-u^2)\,du = \left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{15}}.$

7 (1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1 = \boxed{2\sqrt{2}-2}.$

(2) 一般に, $f(x)$ が $x \geqslant 1$ において単調減少ならば, $k \leqslant x \leqslant k+1$ (k は自然数) のとき $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$ であるから, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$. 左側の不等式を用いて, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$. また, 右側の不等式を用いて, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$. よって, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$. 特に, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ と選び, $\displaystyle\log(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \log n$. よって, $\displaystyle\frac{\log(n+1)}{\log n} \leqslant \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{\log n} + 1$. ここで, $\displaystyle\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log n + \log(1+\frac{1}{n})}{\log n} \to 1\ (n \to \infty)$ であるから, “はさみうちの原理” により, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \boxed{1}.$