# 数学演習第一・中間統一試験【解説】

2021 年 6 月 16 日実施 ・ 試験時間 90 分

**1** 逆三角関数について次の問いに答えよ．ただし, (2) で適する $x$ がない場合には「存在しない」と書け．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)$ の値を求めよ．

**【答】** $\sin\dfrac{8\pi}{7}=\sin\left(\pi-\dfrac{8\pi}{7}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ より，$\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{8\pi}{7}\right)=\boxed{-\dfrac{\pi}{7}}$.

(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\,x+2\,\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{3}=\pi$ を満たす実数 $x$ を求めよ．

**【答】** $\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{1}{3}$ とおけば, 与えられた方程式は $\mathrm{Cos}^{-1}\,x=\pi-2\alpha$ と書ける．また, $\alpha$ の定義により, $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ かつ $0\leq\alpha\leq\pi$ であるが, $0<\cos\alpha<\dfrac{1}{2}$ より, $\alpha$ は $\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあることが分かる．このとき, $\mathrm{Cos}^{-1}\,x=\pi-2\alpha\in\left(0,\,\dfrac{\pi}{3}\right)\subset[0,\pi]$ となり, 確かに解 $x\in\mathbb{R}$ が存在する．その値は

$$x=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha=1-2\cos^2\alpha=1-\frac{2}{9}=\boxed{\frac{7}{9}}.$$

**2** 次の極限値を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}$

**【答】** $y=x^2$ とおけば, $x\to 0$ のとき $y\to 0$ であり,

$$\frac{\cos(x^2)-1}{x^4}=-\frac{1-\cos y}{y^2}=-\frac{1-\cos^2 y}{(1+\cos y)\,y^2}=-\frac{1}{1+\cos y}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\xrightarrow[(x\to 0)]{y\to 0}\boxed{-\frac{1}{2}}.$$

$$\left(\text{あるいは,}\quad=-\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2\xrightarrow[(x\to 0)]{y\to 0}-\frac{1}{2}.\right)$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\,(e^x-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$

**【答】** まず, 対数をとった極限を考える．ロピタルの定理を用いて,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log(e^x-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(e^x-\sin x)}{x^2}\overset{\star}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-\cos x}{e^x-\sin x}}{2x}\\&=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x-\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}\right)\overset{\star}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ここで, ロピタルの定理を適用した箇所を $\overset{\star}{=}$ で表した (次の問題でも同様)．よって,

$$\lim_{x\to 0}(e^x-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\log(e^x-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}}=\boxed{e^{1/2}}=\boxed{\sqrt{e}}.$$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\,x\big(\log\sqrt{x+1}-\log\sqrt{x}\,\big)$

**【答】** 分数の形 (不定型) に変形してからロピタルの定理を適用し,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\,x\big(\log\sqrt{x+1}-\log\sqrt{x}\,\big)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\{\log(x+1)-\log x\}}{\frac{1}{x}}\overset{\star}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\boxed{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

［別法］次のように考えれば, 対数関数の基本的な極限に帰着される ($y=1/x$ とおいた).

$$\lim_{x\to\infty}x\big(\log\sqrt{x+1}-\log\sqrt{x}\,\big)=\lim_{x\to\infty}x\log\sqrt{\frac{x+1}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

**3** 次の問いに答えよ．

(6) 関数 $f_1(x) = \mathrm{Tan}^{-1}(1+\sin x)$ に対し ${f_1}'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ の値を求めよ．

**【答】** ${f_1}'(x) = \dfrac{\cos x}{1+(1+\sin x)^2}$ より，${f_1}'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+(1+\frac{1}{2})^2} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{13}}$.

(7) 関数 $f_2(x) = (\tan x)^x$ に対し ${f_2}'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ．

**【答】** $f_2(x) = (\tan x)^x$ は $0 < x < \pi/2$ で定義されていると考えてよい．$\log f_2(x) = x\log(\tan x)$ の両辺を $x$ で微分して，

$$\frac{{f_2}'(x)}{f_2(x)} = \log(\tan x) + x\cdot\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x} = \log(\tan x) + \frac{x}{\cos x\sin x}.$$

ここで，$f_2(\pi/4) = 1^{\pi/4} = 1$ より，${f_2}'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \log 1 + \dfrac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$.

(8) 関数 $f_3(x) = \tanh x$ に対し ${f_3}'(\log 3)$ の値を求めよ．

**【答】** $f_3(x) = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$ より，

$${f_3}'(x) = \frac{(\sinh x)'(\cosh x) - (\sinh x)(\cosh x)'}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

また, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ より, $\cosh(\log 3) = \dfrac{3+\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{5}{3}$. よって，${f_3}'(\log 3) = \dfrac{1}{(5/3)^2} = \boxed{\dfrac{9}{25}}$.

(9) 関数 $y = e^{3x} + e^{2x} + e^x + 1$ の逆関数を $x = g(y)$ と表すとき, $g'(4)$ の値を求めよ．

**【答】** 説明の便宜のため, $f(x) = e^{3x} + e^{2x} + e^x + 1$ とおく．まず, $f'(x) = 3e^{3x} + 2e^{2x} + e^x > 0$ であるから, $y = f(x)$ は確かに逆関数 $x = f^{-1}(y) = g(y)$ (定義域は $y > 1$) をもつ．次に, $y = 4$ に対応する $x$ の値 $g(4) = f^{-1}(4)$ を求める．$X = e^x > 0$ とおいて,

$$4 = f(x) \quad\Leftrightarrow\quad X^3 + X^2 + X - 3 = (X-1)(X^2+2X+3) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad X = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0.$$

よって, 逆関数の微分の公式により, $g'(4) = \dfrac{1}{f'(0)} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

**4** (10) 関数 $f(x) = \dfrac{2|x|}{x^2+1}$ の極値を求めよ．ただし, 各極値 $b$ に対し「$x = a$ で極大値 (or 極小値) $b$ をとる」という形で答えること．

**【答】** $x \geq 0$ においては, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$. よって，$f(x)$ が偶関数であることに注意して, $f(x)$ の増減は

| $x$ | $-\infty$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

となる．従って， $\boxed{x = \pm 1 \text{ で極大値 } 1 \text{ をとり，} x = 0 \text{ で極小値 } 0 \text{ をとる}}$.

**5** 空間の 3 点 $\mathrm{A}(-1,2,5)$, $\mathrm{B}(2,5,3)$, $\mathrm{C}(3,4,3)$ を通る平面を $P$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(11) 平面 $P$ の方程式を $\underline{ax+by+cz=d\text{ の形}}$ で答えよ.

**【答】** 平面 $P$ は点 A を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を法線ベクトルとする. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}3\\3\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-6\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$ であるから, 方程式は $(x+1)+(y-2)+3(z-5)=0$ で与えられる. これを整理して $\boxed{x+y+3z=16}$.

(12) 3 点 A, B, C を頂点とする三角形の面積を求めよ.

**【答】** $(\text{三角形 ABC の面積})=\dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+1+9}=\boxed{\sqrt{11}}$.

**6** $A=\begin{bmatrix}1&-1\\3&5\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-3\end{bmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(13) $P^{-1}$ を求めよ.

**【答】** $P^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix}-3&-1\\1&1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}}$.

(14) $P^{-1}AP$ を求めよ.

**【答】** $P^{-1}AP=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-3\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}6&2\\-4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-3\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}}$.

(15) $n\in\mathbb{N}$ に対し $A^n$ の $(1,1)$ 成分を求めよ.

**【答】** $P^{-1}A^nP=(P^{-1}AP)^n=\begin{bmatrix}2^n&0\\0&4^n\end{bmatrix}$ より,

$$\begin{aligned}A^n=P(P^{-1}A^nP)P^{-1}&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^n&0\\0&4^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2^n&4^n\\-2^n&-3\cdot 4^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\-1&-1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4^n+3\cdot 2^n&-4^n+2^n\\3\cdot 4^n-3\cdot 2^n&3\cdot 4^n-2^n\end{bmatrix}=2^{n-1}\begin{bmatrix}-2^n+3&-2^n+1\\3(2^n-1)&3\cdot 2^n-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

よって, $A^n$ の $(1,1)$ 成分は $\boxed{\frac{1}{2}(3\cdot 2^n-4^n)}$ あるいは $\boxed{2^{n-1}(3-2^n)}$.

**7** 次の問いに答えよ

(16) 行列 $\begin{bmatrix}1&2&4&-1\\2&3&7&-3\\3&5&11&-3\end{bmatrix}$ の (行に関する) 簡約行列を求めよ.

**【答】** 行基本変形を繰り返して,

$$\begin{bmatrix}1&2&4&-1\\2&3&7&-3\\3&5&11&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4&-1\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&4&-1\\0&1&1&1\\0&-1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-3\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\to\boxed{\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}.$$

(17) 行列 $\begin{bmatrix}a&-1&1\\1&-1&-1\\-1&1&b\end{bmatrix}$ の階数が 2 となるための $a, b$ の条件を求めよ

**【答】** 行基本変形により $A:=\begin{bmatrix}a&-1&1\\1&-1&-1\\-1&1&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\a&-1&1\\-1&1&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&a-1&a+1\\0&0&b-1\end{bmatrix}$.

- $a=1$ のとき, $A\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&2\\0&0&b-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ となり, 階数は 2.

- $b=1$ のとき, $A \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $a-1, a+1$ は同時に 0 でならないから, 階数は 2.
- $a \neq 1$ かつ $b \neq 1$ のとき, $A \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{a+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となるから, 階数は 3.

以上より, $A$ の階数が 2 となるための条件は $\boxed{a=1 \text{ または } b=1}$ である.

**8** 次の連立 1 次方程式を解け. ただし, 無数の解をもつならば, 任意定数 (パラメータ) の取り方は標準的な方法, すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え. また, 任意定数の文字は $s$, $t$, ... を用いよ.

(18) $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 3y + 5z = 26 \\ -3x + 3y = 21 \end{cases}$

**【答】** 拡大係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 26 \\ -3 & 3 & 0 & 21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 6 & 48 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 8 \end{cases}$ と同値. ここで, 主成分に対応しない変数 $z$ を任意定数にとり, $z=s$ とおいて, 解は $\boxed{\begin{cases} x = 1-s \\ y = 8-s \\ z = s \end{cases}}$ あるいは $\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$ と表される.

(19) $\begin{cases} 2x - 4y + z + w = 0 \\ x - 2y + 2z - 4w = 0 \\ 3x - 6y + z + 3w = 0 \\ -x + 2y + z - 5w = 0 \end{cases}$

**【答】** 係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって, 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{cases} x - 2y + 2w = 0 \\ z - 3w = 0 \end{cases}$ と同値. ここで, 主成分に対応しない変数 $y, w$ を任意定数にとり, $y=s$, $w=t$ とおいて, 解は $\boxed{\begin{cases} x = 2s-2t \\ y = s \\ z = 3t \\ w = t \end{cases}}$ あるいは $\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$ と表される.

**9** (20) 連立一次方程式 $\begin{cases} 3x + 3y + az = 10 \\ 2x + 2y + 5z = 7 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ が解をもたないための $a$ の条件を求めよ.

**【答】** 拡大係数行列に行基本変形を施して,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & a & 10 \\ 2 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & a & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-7 \end{bmatrix}.$$

解をもたないための条件は (係数行列の階数) $\neq$ (拡大係数行列の階数) であるから, 求める条件は $\boxed{a \neq 7}$.