

数学演習第二（演習第1回）

微積・線形：前学期の復習（広義積分を含む）

2021年10月6日

【要点】

広義積分の定義

- $[a, \infty)$ での連続関数 $f(x)$ に対し，区間 $[a, \beta]$ での積分 $\int_a^\beta f(x)dx$ を考える．
 $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x)dx$ が収束するとき広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ を $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x)dx$ で定義する．
- $(-\infty, b]$ での連続関数 $f(x)$ に対し，区間 $[\alpha, b]$ での積分 $\int_\alpha^b f(x)dx$ を考える． $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_\alpha^b f(x)dx$ が収束するとき広義積分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ を $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_\alpha^b f(x)dx$ で定義する．
- $[a, b)$ での連続関数 $f(x)$ に対し，区間 $[a, \beta]$ ($\beta < b$) での積分 $\int_a^\beta f(x)dx$ を考える． $\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x)dx$ が収束するとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ を $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x)dx$ で定義する．
- $(a, b]$ での連続関数 $f(x)$ に対し，区間 $[\alpha, b]$ ($a < \alpha$) での積分 $\int_\alpha^b f(x)dx$ を考える． $\lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^b f(x)dx$ が収束するとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ を $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+0} \int_\alpha^b f(x)dx$ で定義する．
- (a, b) での連続関数 $f(x)$ を考える．このとき適当な点 c ($a < c < b$) に対し広義積分 $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ が存在するとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ を $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ で定義する．
ここで，積分値は c の取り方に関係しないことに注意する．

広義積分の例

例 1

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\beta \rightarrow 1-0} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\beta \rightarrow 1-0} [-2\sqrt{1-x}]_0^\beta \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1-0} (-2\sqrt{1-\beta} + 2) = 2 \\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\beta = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = 1 \end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -1+0} [\sin^{-1}x]_\alpha^0 + \lim_{\beta \rightarrow 1-0} [\sin^{-1}x]_0^\beta \\ &= -\sin^{-1}(-1) + \sin^{-1}1 = \pi \end{aligned}$$

例 3 実数 a, b, k に対して， $a < b$ のとき

$$\int_a^b (b-x)^k dx = \int_a^b (x-a)^k dx = \begin{cases} \frac{(b-a)^{k+1}}{k+1} & (k > -1) \\ \infty & (k \leq -1) \end{cases}$$

【レポート課題（答案をオンライン提出する問題）】

問 1 $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 13 & 11 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ .

問 2 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 24x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 15x_4 = 0 \end{cases}$ の解を求めよ .

問 3 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = a \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 9x_3 = 1 \end{cases}$ が解をもたないための条件を求めよ .

問 4 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ .

問 5 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -6 & -5 \\ 8 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ の値を求めよ .

問 6 $\text{Cos}^{-1}\left(\sin \frac{12\pi}{11}\right)$ の値を求めよ .

問 7 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Tan}^{-1}(2x)}{e^{3x} - 1}$ を求めよ .

問 8 $x = 0$ の近くで関数 $e^{3x} \log(1 + 2x)$ を 4 次の項まで漸近展開せよ . つまり , 定数 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を計算し ,

$$e^{3x} \log(1 + 2x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

の形に表せ .

問 9 広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$ の値を求めよ .

問 10 広義積分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^7 dx$ の値を求めよ .

【それ以外の自主学習用問題（提出不要）】

1 次の連立一次方程式を解け．

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10 \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -4 \end{cases}$$

2 次の同次連立一次方程式が非自明な解を持つための条件を求めよ．

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - (5+a)x_3 = 0 \\ 6x_1 + (4-a)x_2 - 6x_3 = 0 \\ (1-a)x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

3 次の連立一次方程式が解を持つための条件を求めよ．

$$(1) \begin{cases} 5x_1 + 17x_2 - 13x_3 = 2 \\ 4x_1 + 14x_2 - 12x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = a \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = p \\ -x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 4x_4 = q \\ 6x_1 + x_2 + 11x_3 + 7x_4 = r \\ -3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = s \end{cases}$$

4 次の行列の階数を求めよ．また正則な場合には逆行列を求めよ．

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 9 \\ 3 & 14 & 14 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5 次の行列の行列式を求めよ．

$$(1) \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 & -3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 17 & 2 & 4 \\ 2 & 11 & 4 & -3 \\ 4 & 23 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & \lambda + 2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 4 & 2 \\ -5 & -2 & -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

6 次の値を求めよ .

$$(1) \quad 2 \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1}{2} - \operatorname{Tan}^{-1} \frac{1}{7} \quad (2) \quad \cos (\operatorname{Tan}^{-1} \sqrt{15})$$

7 次の導関数または高階導関数を求めよ .

$$(1) \quad f(x) = \operatorname{Tan}^{-1}(x^2 + 1) \text{ に対する } f'(x) \quad (2) \quad f(x) = \log |x^3 - 3x + 2| \text{ に対する } f^{(n)}(x)$$
$$(3) \quad f(x) = x^2 \sin x \text{ に対する } f^{(n)}(x)$$

8 $x = 0$ のまわりで次の関数を 4 次の項まで漸近展開せよ .

$$(1) \quad \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \quad (2) \quad \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

9 次の極限值を求めよ .

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x - 6x + x^3}{xe^{x^2} - x - x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Tan}^{-1} x - x}{x^3}$$
$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (a \operatorname{Tan}^{-1} x)^x \quad (a > 0 \text{ は定数}) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

10 次の不定積分または定積分を求めよ .

$$(1) \quad \int x^2 \operatorname{Tan}^{-1} x dx \quad (2) \quad \int_1^2 \frac{6x+1}{3x^2+x-2} dx \quad (3) \quad \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1+2 \cos x}$$
$$(4) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (5) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$$