数学演習第二（演習第１回）解答例

【レポート課題（答案をオンライン提出する問題）の解答例】

問 $\boxed{1}$ $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 13 & 11 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 10 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

よって，求める階数は 3. ただし，階数を求めるために簡約行列まで変形する必要はなく，途中の階段行列からも得られる．本問の場合，３番目の変形で階数は 3 であるとわかる．

問 $\boxed{2}$ 与えられた連立１次方程式の係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 10 & 3 & 24 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって，求める解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} s \quad$ (s:任意定数)．

問 $\boxed{3}$ 行基本変形して連立１次方程式の拡大係数行列を階段行列にすると

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & a \\ 2 & 5 & -11 & 2 \\ 3 & 5 & -9 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & a \\ 0 & 2 & -6 & 2-a \\ 1 & 2 & -4 & 1-a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 3a-2 \\ 0 & 2 & -6 & 2-a \\ 1 & 2 & -4 & 1-a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 1-a \\ 0 & 1 & -3 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 2-5a \end{bmatrix}.$$

よって，求める条件は $a \neq \dfrac{2}{5}$.

問 $\boxed{4}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 13 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -17 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 26 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -30 & -1 & 7 \end{bmatrix}$. よって，求める逆行列は $\begin{bmatrix} -17 & -1 & 4 \\ 26 & 1 & -6 \\ -30 & -1 & 7 \end{bmatrix}$.

問 $\boxed{5}$ $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & -6 & -5 \\ 8 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -6 & -5 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -6 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & -6 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$
$6\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -8 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 0 & 13 & 13 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -8 \end{vmatrix} = -78\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} =$
78.

よって，求める行列式の値は 78.

問 $\boxed{6}$

$$\sin\frac{12\pi}{11} = -\sin\frac{\pi}{11} = -\cos\frac{9\pi}{22} = \cos\left(\pi - \frac{9\pi}{22}\right) = \cos\frac{13\pi}{22}$$

よって，求める値は $\dfrac{13\pi}{22}$.

問 $\boxed{7}$ ロピタルの定理を使えば

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}(2x)}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3e^{3x}}\cdot\frac{2}{1+4x^2} = \frac{2}{3}$$

よって，求める値は $\dfrac{2}{3}$.

【別解】$\mathrm{Tan}^{-1}x = x + o(x)$, $e^x = 1 + x + o(x)$ $(x \to 0)$ から

$$\frac{\mathrm{Tan}^{-1}(2x)}{e^{3x}-1} = \frac{2+\frac{o(x)}{x}}{3+\frac{o(x)}{x}} \to \frac{2}{3} \quad (x \to 0)$$

問 $\boxed{8}$

$$\begin{aligned}
&e^{3x}\cdot\log(1+2x)\\
&= \left(1 + (3x) + \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{6}(3x)^3 + \frac{1}{24}(3x)^4 + o(x^4)\right)\cdot\left(2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 - \frac{1}{4}(2x)^4 + o(x^4)\right)\\
&= 2x + 4x^2 + \frac{17}{3}x^3 + 4x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

よって，求める漸近展開は $2x + 4x^2 + \dfrac{17}{3}x^3 + 4x^4 + o(x^4)$.

問 $\boxed{9}$ $e^{-x} = -(e^{-x})'$ として部分積分法を 2 回適用すると

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\cdot\sin x\,dx &= -\int_0^\infty \left(e^{-x}\right)'\cdot\sin x\,dx = -\left[e^{-x}\cdot\sin x\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\cdot\cos x\,dx\\
&= -\int_0^\infty \left(e^{-x}\right)'\cdot\cos x\,dx = -\left[e^{-x}\cdot\cos x\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\cdot\sin x\,dx\\
&= 1 - \int_0^\infty e^{-x}\cdot\sin x\,dx
\end{aligned}$$

よって，求める値は $\dfrac{1}{2}$.

【別解】オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\,\sin x$ より，$e^{-x}\sin x = \dfrac{e^{(i-1)x} - e^{-(i+1)x}}{2i}$ なので

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx = \left[\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{(i-1)x}}{i-1} + \frac{e^{-(i+1)x}}{i+1}\right)\right]_0^\infty = \frac{-1}{2i}\left(\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{2}$$

問 $\boxed{10}$ ガンマ関数について微積教科書の p. 70，p. 72 を参照すれば

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cdot x^7\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^3\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{4-1}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma(4) = \frac{1}{2}3! = 3$$

よって，求める値は 3. 同様にして，$\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx = \frac{n!}{2}$ で，$\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$ (例 3，p. 134) が知られている.

【それ以外の自主学習用問題の解答例】

$\boxed{1}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & -1 \\ 5 & 10 & 6 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c_1, c_2, c_3は任意)．(2) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c_1, c_2は任意)．(3) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & -10 \\ -3 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -10 & 9 & 25 \\ 0 & 7 & -10 & -36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & -11 \\ 0 & 7 & -10 & -36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -21 \\ 0 & -3 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & -12 & -58 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -21 \\ 0 & 1 & -12 & -58 \\ 0 & 0 & -37 & -185 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ より，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$．(4) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$．$\boxed{2}$ (1) 係数行列が非正則，つまり行列式が 0 となるときであるから，$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a - 5$ より，$a = \dfrac{5}{2}$．(2) 係数行列の行列式は，$(a-4)(a+2)^2$ より，$a = 4, -2$．$\boxed{3}$ (1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 17 & -13 & 2 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 14 & -12 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & a-2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2-a \\ 0 & 2 & -8 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 3a-5 \\ 0 & 1 & -4 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 2a-7 \end{array}\right]$ より，$a = \dfrac{7}{2}$．(2) $31p - 16q - 13r = 0$．$\boxed{4}$ (1) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 14 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 9 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 14 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$ より，階数 3 で正則．逆行列は，$\begin{bmatrix} 0 & 14 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$．(2) 階数 2．(3) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，階数 3 で非正則．(4) 階数 4 で，逆行列は，$\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$．$\boxed{5}$ (1) $\begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & 0 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2(\lambda+2)$．(2) 55．(3) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 17 & 2 & 4 \\ 2 & 11 & 4 & -3 \\ 4 & 23 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & -13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -2 \\ 1 & -2 & -7 \\ 3 & -13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 12 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & -7 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ -7 & 15 \end{vmatrix} = -(-45+84) = -39$．(4) $\lambda^2(\lambda-2)^2$．$\boxed{6}$ (1) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$，$\beta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおく．$0 < \dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{2} < 1$

より $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ となり，$0<2\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$．一方，$\tan 2\alpha=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{4}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{7}$ より，$\tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=1$．よって，$2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$．(2) $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{15}$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$．
$\boxed{7}$ (1) $f'(x)=\dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$．(2) $\log|x^3-3x+2|=2\log|x-1|+\log|x+2|$ だから，$n\geqq 1$ で，$f^{(n)}(x)=\dfrac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left\{\dfrac{2}{(x-1)^n}+\dfrac{1}{(x+2)^n}\right\}$．
(3) ライプニッツの公式から，$f^{(n)}(x)=x^2(\sin x)^{(n)}+2nx(\sin x)^{(n-1)}+n(n-1)(\sin x)^{(n-2)}=x^2\sin\Bigl(x+\dfrac{n}{2}\pi\Bigr)+2nx\sin\Bigl(x+\dfrac{n-1}{2}\pi\Bigr)+n(n-1)\sin\Bigl(x+\dfrac{n-2}{2}\pi\Bigr)=\{x^2-n(n-1)\}\sin\Bigl(x+\dfrac{n}{2}\pi\Bigr)-2nx\cos\Bigl(x+\dfrac{n}{2}\pi\Bigr)$．$\boxed{8}$ いずれも $x\to 0$ で考える．(1) $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)$，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^4)$ だから，$\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^4)$．(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ を積分して $x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$．$\boxed{9}$ (1) $x\to 0$ で，$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)$，$e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^5)$ だから，分子 $=\dfrac{x^5}{20}+o(x^5)$．分母 $=\dfrac{x^5}{2}+o(x^5)$．よって求める極限値は $\dfrac{1}{10}$．(2) ロピタルの定理を適用して $-\dfrac{1}{3}$．(3) $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)^x=x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)$ において，$x\to\infty$ のとき $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)\to\log\dfrac{\pi a}{2}\lesseqgtr 0\ \left(a\lesseqgtr\dfrac{2}{\pi}\right)$ であるから，$\lim\limits_{x\to\infty}x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)=-\infty\ (0<a<\frac{2}{\pi}),\ =\infty\ (a>\frac{2}{\pi})$．$a=\frac{2}{\pi}$ のときは不定形であり，ロピタルの定理により，$\lim\limits_{x\to\infty}x\log\Bigl(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Tan}^{-1}x\Bigr)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(\mathrm{Tan}^{-1}x)+\log\frac{2}{\pi}}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=-\dfrac{2}{\pi}$．よって求める極限値は $e^{-\frac{2}{\pi}}$．(4) $\dfrac{\tan x}{x}-1=\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$ と $\log(1+x)=x+o(x)$ から，$\log\Bigl(\dfrac{\tan x}{x}\Bigr)=\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$ より，極限値は $e^{\frac{1}{3}}$．$\boxed{10}$ (1) $\displaystyle\int\Bigl(\frac{x^3}{3}\Bigr)'\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{1}{3}\int\Bigl(x-\frac{x}{1+x^2}\Bigr)dx$ $\displaystyle=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\log(1+x^2)+C$．
(2) $3x^2+x-2=t$ とおくと，$\displaystyle\int_1^2\frac{6x+1}{3x^2+x-2}dx=\int_2^{12}\frac{1}{t}dt=[\log t]_2^{12}=\log 6$．(3) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ より，$\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{1+2\cos x}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2}{3-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\Bigl(\frac{1}{\sqrt{3}-t}+\frac{1}{\sqrt{3}+t}\Bigr)dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\log 2}{\sqrt{3}}$．(4) 被積分関数は $x=0,1$ で発散しているので広義積分．$0<\varepsilon<a<1$ をとって，$\displaystyle\int_\varepsilon^a\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_\varepsilon^a\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\bigl(x-\frac{1}{2}\bigr)^2}}=\bigl[\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)\bigr]_\varepsilon^a=\mathrm{Sin}^{-1}(2a-1)-\mathrm{Sin}^{-1}(2\varepsilon-1)$．ここで $a\to 1$ のとき，$\mathrm{Sin}^{-1}(2a-1)\to\mathrm{Sin}^{-1}1=\dfrac{\pi}{2}$．$\varepsilon\to 0$ のとき，$\mathrm{Sin}^{-1}(2\varepsilon-1)\to\mathrm{Sin}^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$．よって求める広義積分の値は π．
(5) 広義積分．$0<M$ をとって，$\displaystyle\int_0^M\frac{x}{e^x}dx$ を考える．$\displaystyle\int_0^M\frac{x}{e^x}dx=-\int_0^M x(e^{-x})'dx=-[xe^{-x}]_0^M+\int_0^M e^{-x}dx=-Me^{-M}-e^{-M}+1\to 1\ (M\to+\infty)$．[注意] ロピタルの定理より $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$，これを用いた．