数学演習第二 （演習第２回）

線形：直線・平面の方程式と外積　2021 年 10 月 13 日

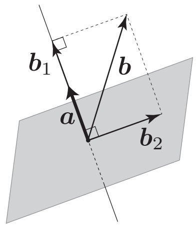
要点

A 内積・外積 (線形 p.4, pp.7–8)

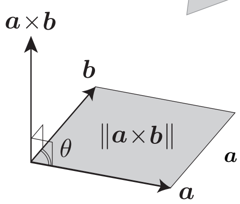
空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

(1) $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$, $\boxed{\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **内積**, $\boldsymbol{a}$ の **長さ** (**大きさ**, **ノルム**) という．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ が成り立つ．(平面ベクトルに対しても同様)

(2) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ ($\boldsymbol{b}_1 = t\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{a} = 0$) の形に一意に分解できる (実際, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{a} = t\,\|\boldsymbol{a}\|^2$ より t が定まり, $\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ となる). このとき, $\boldsymbol{b}_1$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への**正射影** (または $\boldsymbol{a}$ への正射影), $\boldsymbol{b}_2$ を $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への正射影と呼ぶ.



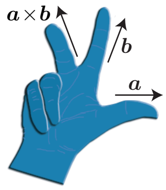
(3) $\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の **外積** (= **ベクトル積**) と呼ぶ.



$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ が平行でないとき, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta \in (0, \pi)$ とすれば,

① $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と垂直,　② $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は**右手系**,

③ $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ $= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積$)$.



なお, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が**右手系** (をなす) とは, 右手の親指, 人差し指, 中指の 3 本だけを立てたとき, 3 本の指が指す方向をこの順に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の方向に合わせることができることをいう．行列式を用れば, $\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix} > 0$ であることに他ならない.

B 面積・体積 (線形 p.6, p.8, pp.85–86)

(1) 平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して,

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S = \left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right| \left(= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}\,\right)$.

(2) 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して,

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \left(= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta = \sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}\,\right)$,

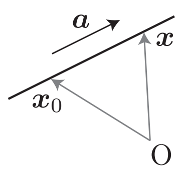
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $V = \left|\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{bmatrix}\right| \left(= |(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|\,\right)$.

C 空間内の直線と平面 (線形 pp.10–13)

空間の点 $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ に対して,

(1) 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**方向ベクトル**とする直線 ($\boldsymbol{a}$ に平行な直線) の方程式は,

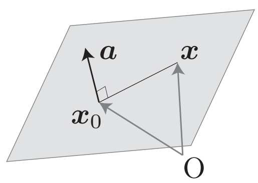
$$\underset{\text{(ベクトル方程式)}}{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}} \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \text{ より, } \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$



(右の表現は $abc \neq 0$ の場合の形. 例えば $ab \neq 0, c = 0$ なら, $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}, z = z_0$ となる.)

(2) 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**法線ベクトル**とする平面 ($\boldsymbol{a}$ に垂直な平面) の方程式は,

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0, \text{　すなわち } \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$



(右の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)

1　小テスト問題

$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-5\\4\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

第 1 問　$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を求めよ.

【選択肢】　**(ア)** $\dfrac{\pi}{6}$　　**(イ)** $\dfrac{\pi}{3}$　　**(ウ)** $\dfrac{2\pi}{3}$　　**(エ)** $\dfrac{5\pi}{6}$

第 2 問　$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行四辺形の面積を求めよ.

【選択肢】　**(ア)** $5\sqrt{2}$　　**(イ)** $10\sqrt{2}$　　**(ウ)** $5\sqrt{3}$　　**(エ)** $10\sqrt{3}$

第 3 問　$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る四面体の体積を求めよ.

【選択肢】　**(ア)** $\dfrac{25}{6}$　　**(イ)** $\dfrac{25}{3}$　　**(ウ)** 25　　**(エ)** 50

第 4 問　$\boldsymbol{a}$ の「$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ に平行な平面」($=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ に垂直な平面) への正射影を求めよ.

ヒント: $\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}$ の「$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ に平行な直線」への正射影) を計算すればよい.

【選択肢】　**(ア)** $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$　　**(イ)** $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$　　**(ウ)** $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\5\\-11\end{bmatrix}$　　**(エ)** $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}5\\2\\-11\end{bmatrix}$

2　レポート課題

答だけでなく, 計算の過程も書いて下さい. （**A４用紙１〜２枚**にまとめて提出）

I　$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$ に対して,

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ を計算せよ.

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を計算せよ.

II　２平面 $2x+3y-z=2,\ 3x+4y+z=1$ について次の問いに答えよ.

(3) 連立１次方程式 $\begin{cases}2x+3y-z=2\\3x+4y+z=1\end{cases}$ を解け.

(4) ２平面の交線の方程式を $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ の形で答えよ.

3　演習問題

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$, “$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角”, “$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影” を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ のとき, $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影 $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}$ の「$\boldsymbol{a}$ に垂直な平面」への正射影 $\boldsymbol{b}_2$ に対し, $\|\boldsymbol{b}_1\|$ と $\|\boldsymbol{b}_2\|$ を $\|\boldsymbol{a}\|,\|\boldsymbol{b}\|,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ を用いて表せ ($\boxed{\textsf{A}}$ (2) の説明も見よ).

(3) $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$) に余因子展開を適用して $\boxed{\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}$ を示せ. 更に, この関係式を用いて, 次を示せ: ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$, ② $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立ならば $\det[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]>0$ (すなわち $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が右手系).

(4) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$, 3 次**直交行列** Q ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ${}^{\mathrm{t}}QQ=Q{}^{\mathrm{t}}Q=E$) に対して, $Q\boldsymbol{a}\cdot Q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ (従って $\|Q\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{a}\|$) 及び $Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ ($\pm$ は $\det Q\in\{\pm1\}$ の符号を表す) を示せ.

$\boxed{\textbf{2}}$ $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ で, c は定数とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 1 つの式からなる連立 1 次方程式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=c$ を解け.

(2) 連立 1 次方程式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつための $\boldsymbol{b}$ の条件を $b_3=(b_1,b_2$ の式$)$ の形で表せ. (ヒント: まず, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を定めよ.)

(3) $\boldsymbol{b}$ が (2) の条件を満たすとき, 連立 1 次方程式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解け.

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) $\boxed{\textsf{1}}$ (2) を利用して次を示せ.

(i) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と要点 $\boxed{\textsf{C}}$ (1) の直線の距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる.

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と要点 $\boxed{\textsf{C}}$ (2) の平面 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$ との距離 (垂線の長さ) は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ で与えられる. 平面が $ax+by+cz+d=0$ の形なら $\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ (重要) となる.

(2) $\mathrm{A}(1,1,0)$, $\mathrm{B}(2,-2,3)$, $\mathrm{C}(3,-1,1)$, $\mathrm{D}(-1,3,4)$ とする.

(i) 直線 AB (2 点 A, B を通る直線) の方程式を求めよ.

(ii) 平面 ABC (3 点 A, B, C を通る平面) の方程式を求めよ. (まず法線ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.) また, 点 D とこの平面の距離を求めよ.

(iii) 点 A を通る平面 ABC の法線 (ℓ とする) の方程式を求めよ. また, 点 D と直線 ℓ の距離を求めよ.

【注】(ii), (iii) の距離は, それぞれ点 D から平面 ABC, 直線 ℓ に下ろした垂線の長さに他ならない. この点に注目すれば (1) を利用しなくても計算できる (まず “垂線の足” の座標を求める).

(3) 直線 $\ell : \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{-4}$ と平面 $\alpha : 5x - 4y - 3z = 5$ について考える.

(i) 直線 ℓ と平面 α の交点 $\boldsymbol{x}_0$ を求めよ.

(ii) 直線 ℓ を平面 α 上に正射影して得られる直線 m ($\boldsymbol{x}_0$ を通り, “ℓ の方向ベクトルの平面 α への正射影” を方向ベクトルとする直線) の方程式を求めよ.

(iii) 直線 ℓ と平面 α のなす角 (= 2 直線 ℓ, m のなす角) を求めよ.

(iv) 2 直線 ℓ, m を含む平面の方程式を求めよ.

(4) 2 直線 $\dfrac{x+c}{5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2}{4}$, $\dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y-5}{-4} = \dfrac{z+1}{3}$ (c は定数) について考える.

(i) 2 直線のなす角を求めよ.

(ii) $c = -1$ のとき 2 直線は交わる. 2 直線の交点の座標と 2 直線を含む平面の方程式を求めよ.

(iii) $c = 14$ のとき 2 直線はねじれの位置にある (平行でなく共有点を持たない). 2 直線の共通垂線 (両方と垂直に交わる直線) の方程式を求めよ.