数学演習第二（演習第２回）【解答例】

線形：直線・平面の方程式と外積　2021 年 10 月 13 日

1　小テスト問題

問１　$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -25$, $\|\boldsymbol{a}\| = 5\sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{b}\| = 5\sqrt{2}$. なす角を $\theta \in [0, \pi]$ として,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{-25}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}. \qquad \therefore\ \theta = \boxed{\frac{2\pi}{3}}.$$

→ **(ウ)** が正解

問２　$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ より, 求める面積 S は,

$$S = \|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\| = 2\sqrt{25 + 16 + 9} = \boxed{10\sqrt{2}}.$$

→ **(イ)** が正解

問３　$V = \dfrac{1}{6}|\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]|$ (平行六面体の体積の 1/6) を計算すればよい.

$$\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 50 \ \text{より，}\ V = \frac{50}{6} = \boxed{\frac{25}{3}}$$

→ **(イ)** が正解

問２の結果を用いて, $V = (1/6)|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ を計算してもよい.

問４　$\boldsymbol{d} := \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{d}$ への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|^2}\boldsymbol{d} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. よって,

$\boldsymbol{a}$ の「$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に平行な平面」への正射影は

$$\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|^2}\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -11 \end{bmatrix}}.$$

→ **(エ)** が正解

2　レポート課題

I　(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}}$. 一般に, $\boxed{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}}$.

(2) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}}$, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}}$. (結合律は不成立 !)

一般に, $\boxed{\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}}$ が成り立つことが知られている.

II　(3) 拡大係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

よって, 求める解は $\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}}$ (t は任意定数).

(4) (3) で求めた連立１次方程式の解は２直線の交線のベクトル方程式に他ならない. よって, 求める方程式は

$\boxed{\dfrac{x+5}{-7} = \dfrac{y-4}{5} = z}$. 【注】指定された形に最大限従うと $\frac{x-(-5)}{-7} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-0}{1}$ であるが, 通常は枠内のように表す.

3 演習問題

1 (1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=2-3-6=-7$, $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{14}$, $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{14}$. また, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ のなす角 $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ は,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}\quad \text{より,}\quad \theta=\frac{2\pi}{3}.$$

更に, $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}=\dfrac{-7}{14}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{b}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ より, $\|\boldsymbol{b}_1\|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, $\|\boldsymbol{b}_2\|=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{b}_1\|^2}=\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ ($\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}$ が直角三角形をなすことに注意). ここまでは $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ のベクトルで成立するが, $\|\boldsymbol{b}_2\|$ については, 空間ベクトルであれば外積を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, 平面ベクトルであれば行列式を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{|\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}]|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ と表せる.

(3) $\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ を第 1 列に関して余因子展開し, そのあと外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned}\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]&=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_3&c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1&c_1\\b_2&c_2\end{vmatrix}\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

また, $\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]$ を第 3 列に関して余因子展開すれば, 同様な計算により $\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ となり,

$$\boxed{\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}$$

が得られる. (第二の等号については, 行列式の性質を用いて

$$\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]=-\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{b}]=\det[\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}]=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

と考えてもよい.) 上の関係式を用いて, ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}]=0$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{b}]=0$ (同じ列を含む行列式の値は 0). ② $\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2\geqslant 0$. あとは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が 1 次独立のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ を示す必要があるが, 図形的に考えれば $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積) なので, これは明らか.

(4) 一般に $P\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}P\boldsymbol{b}$ が成り立つ. これを用いて, $Q\boldsymbol{a}\cdot Q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}QQ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 更に, $\forall\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ に対して,

$$(Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\det[Q\boldsymbol{a}\ \ Q\boldsymbol{b}\ \ Q{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=(\det Q)\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ {}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

であるから, $Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が従う.

2 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=c$ に対する拡大係数行列は $[1\ \ 2\ \ 3\ \ c]$ は簡約行列であり, これより求める解は

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\0\\0\end{bmatrix}+\underbrace{s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}\text{ に垂直}}\quad (s,t\text{ は任意定数}).$$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2z-3y\\3x-z\\y-2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ より, $A=\begin{bmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書ける. ここで, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつための条件を調べるために, $\begin{bmatrix}A&\boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ に行基

本変形を施す:

$$
\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & b_1 \\ 3 & 0 & -1 & b_2 \\ -2 & 1 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & b_2+b_3 \\ -2 & 1 & 0 & b_3 \end{bmatrix}
$$
$$
\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & b_2+b_3 \\ 0 & -3 & 2 & b_1 \\ 0 & 3 & -2 & 2b_2+3b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & b_2+b_3 \\ 0 & -3 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1+2b_2+3b_3 \end{bmatrix}.
$$

よって, 解をもつための条件は $\underbrace{b_1+2b_2+3b_3=0}_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0}$, すなわち $b_3 = -\dfrac{b_1+2b_2}{3}$ が成り立つこと.

(3) (2) の条件が満たされるとき, 上の基本変形を続けて,

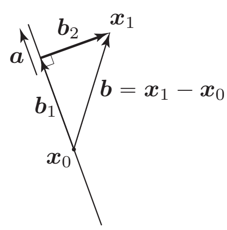
$$
\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}b_2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

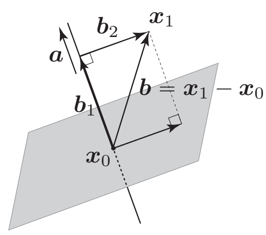
よって, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}b_2 \\ -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}b_2 \\ -\frac{1}{3}b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}\ \text{に平行}} \quad (t_1 \text{ は任意定数}).
$$

3 (1) (i) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{\text{C}}$ (1) の直線との距離は $\boxed{1}$ (2) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_2\|$ に等しい (下左図). よって, 求める距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}_0+\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.)

(ii) 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{\text{C}}$ (2) の平面との距離は $\boxed{1}$ (2) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_1\|$ に等しい (下右図). よって, 求める距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. (“垂線の足” は $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}_1-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.) 平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0+d=0$ であるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d$ となり, 距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ と表される.





(2) (i) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ が直線 AB の方向ベクトルを与えるので, 直線 AB の方程式は $x-1=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{3}$.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ が平面 ABC の法線ベクトルだから, 平面 ABC の方程式は

$$
3(x-1)+5(y-1)+4z=0. \quad \text{これを整理して,}\ 3x+5y+4z=8.
$$

次に, (1) の (ii) を利用するために, $\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (A の位置ベクトル), $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (D の位置ベクトル), $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (平面 ABC の法線ベクトル) とおけば, 点 D と平面 ABC の距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{20}{\sqrt{50}}=2\sqrt{2}$.

(iii) (ii) と同じ意味で $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{a}$ を用いる. 直線 ℓ は点 A を通り, $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, その方程式は $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z}{4}$. また, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ より, (1) の (i) を

用いて, 点 D とこの直線の距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{4\sqrt{50}}{\sqrt{50}}=4.$

【注】(ii), (iii) の距離は D から平面, 直線に下ろした垂線の長さである. (ii) では D から平面 ABC に垂線 DE を下ろせば, $\mathrm{E}(-1+3t,3+5t,4+4t)$ が $3x+5y+4z=8$ 上にあるから $t=-\frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\|=2\sqrt{2}$. (iii) では D から "A を通る平面 ABC の法線" に垂線 DF を下ろせば, $\mathrm{F}(1+3u,1+5u,4u)$ が $\overrightarrow{\mathrm{DF}}\perp\boldsymbol{a}$ を満たすから $u=\frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\|=4$.

(3) (i) 直線 ℓ 上の点 $(5t+4,\ 3t-1,\ -4t-2)$ を平面 α の方程式 $5x-4y-3z=5$ に代入して, $5(5t+4)-4(3t-1)-3(-4t-2)=5$ となり, $t=-1$. よって, 交点 $\boldsymbol{x}_0$ の座標は $(-1,-4,2)$.

(ii) α の法線ベクトルが $\boldsymbol{a}:=\begin{bmatrix}5\\-4\\-3\end{bmatrix}$, ℓ の方向ベクトルが $\boldsymbol{b}:=\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{b}$ の平面 α への正射影は $\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}-\dfrac{25}{50}\begin{bmatrix}5\\-4\\-3\end{bmatrix}=\dfrac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\parallel\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$. よって, 直線 m の方程式は $x+1=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

(iii) $\boldsymbol{c}:=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ が直線 m の方向ベクトルであるから, 直線 ℓ,m のなす角を $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$ とすれば,

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|}=\frac{|5+6+4|}{\sqrt{50}\sqrt{6}}=\frac{15}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\quad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}.\qquad\left(\text{このとき, }\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)$$

【注】一般に, 2 直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ であるとき, この 2 直線のなす角 θ ($\underset{\sim\sim\sim\sim}{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}$) は「$\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ のなす角」または「$\boldsymbol{b},-\boldsymbol{c}$ のなす角」のいずれかで与えられる. 従って, $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|}$ が成り立つ.

(iv) 求める平面は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\\7\end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする. よって, 方程式は

$$5(x+1)+(y+4)+7(z-2)=0,\quad \text{すなわち}\quad 5x+y+7z=5.$$

(4) 2 直線の方向ベクトルは $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}5\\-4\\3\end{bmatrix}$. また, 2 直線上の点は $(5s-c,\ 3s+1,\ 4s+2)$, $(5t-4,\ -4t+5,\ 3t-1)$ とおけることに注意する.

(i) 2 直線のなす角を $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$ とすれば,

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{25}{5\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}.$$

(ii) $c=-1$ のとき, $(5s+1,\ 3s+1,\ 4s+2)=(5t-4,-4t+5,\ 3t-1)\iff(s,t)=(0,1)$ より, 2 直線は $(1,1,2)$ で交わる. よって, 2 直線を含む平面は点 $(1,1,2)$ を通り, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}25\\5\\-35\end{bmatrix}\parallel\begin{bmatrix}5\\1\\-7\end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, その方程式は

$$5(x-1)+(y-1)-7(z-2)=0.\qquad\therefore\ 5x+y-7z+8=0.$$

(iii) $c=14$ のとき, 与えられた 2 直線と求める直線 (共通垂線) の交点は

$$\mathrm{A}(5s-14,\ 3s+1,\ 4s+2),\quad \mathrm{B}(5t-4,-4t+5,\ 3t-1)$$

とおける. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の両方と垂直であるから, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\parallel\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{bmatrix}-5s+5t+10\\-3s-4t+4\\-4s+3t-3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}5\\1\\-7\end{bmatrix}$$

を満たす k が存在する. これより, $s=1,\ t=0,\ k=1$. よって, $\mathrm{B}(-4,5,-1)$ となるから, 求める直線の方程式は $\dfrac{x+4}{5}=y-5=\dfrac{z+1}{-7}$.