数学演習第二 （演習第3回）

線形：ベクトル空間・部分空間

2021 年 10 月 27 日

- **小テスト** の問題は $\boxed{1}$ の 4 問です. **レポート課題** は $\boxed{2}$ の 4 問です.
- それ以外の**演習問題**は自習用です. こちらも必ず解きましょう.
- 要点を読んでから取り組むとよいでしょう.

【要点】

ベクトル空間 V(線形教科書 p.102-103) の部分集合 W が再びベクトル空間の性質を満たすとき，元の空間 V の部分空間という.

〈部分空間の条件〉 (線形教科書 p.105)
ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が V の**部分空間**であるための必要十分条件は次の 3 条件すべてを満たすことである；
(i) $\mathbf{0} \in W$. (ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$. (iii) $\boldsymbol{a} \in W, k \in \mathbb{R} \Rightarrow k\boldsymbol{a} \in W$.
（注）(i) は (ii) または (iii) から導けるが, (i) が満たされないとき W は部分空間ではないので, W が部分空間であるかどうかのひとつの目安になる.

〈生成される部分空間に含まれる条件〉 (線形教科書 p.108-110)
数ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ の元 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle \ni \boldsymbol{b} \quad &\Leftrightarrow \quad c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{b} \text{と表せる.} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{非同次連立一次方程式 } [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \text{が解を持つ.} \\
&\overset{\text{教科書 定理 8.4}}{\Leftrightarrow} \quad \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r | \boldsymbol{b}].
\end{aligned}$$

なお，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots$ が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$ に属するかどうかを調べたければ，$[\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_r | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots]$ を行基本変形してその階数を同時に調べるのが早い.

〈ふたつの部分空間の共通部分と和空間〉 (線形教科書 p.110-111)
ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し,

$$\begin{aligned}
W_1, W_2 \text{の}\textbf{共通部分} \quad & W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \in W_1 \text{かつ} \boldsymbol{v} \in W_2\} \\
W_1, W_2 \text{の}\textbf{和空間} \quad & W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2\}
\end{aligned}$$

は，いずれも V の部分空間となる.

$\boxed{1}$ **(小テスト) [部分空間の判定]**

次のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定し，選択肢 (ア)〜(エ) から適当なものを選べ．ただし，部分空間でない場合は反例が一つ見つかれば十分なので，(イ)(ウ)(エ) の順に調べて適当なものが見つかった時点でそれを答えとせよ．

(1) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| 2x - y = -1 \right\}$

(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 = 0 \right\}$

(3) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{c} ax + by + cz = 0 \\ a, b, c \text{ は定数} \end{array} \right\}$

(4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| xy \geqq 0 \right\}$

選択肢：

(ア) W は部分空間である．

(イ) $\mathbf{0} \notin W$ なので，W は部分空間ではない．

(ウ) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ かつ $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \notin W$ という例が見つかるので，W は部分空間ではない．

(エ) $\boldsymbol{a} \in W, k \in \mathbb{R}$ かつ $k\boldsymbol{a} \notin W$ という例が見つかるので，W は部分空間ではない．

$\boxed{2}$ **(レポート課題)**

[生成される部分空間]

それぞれの部分空間 W に対して，(1) 与えられた $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が W に属するか判定せよ．(2) $\boldsymbol{v} \in W$ となる a を求めよ．

(1) $W = \left\langle \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 12 \\ -15 \end{bmatrix}$

(2) $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

[共通部分と和集合]

(3) $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ 2t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

について, W_1, W_2, 共通部分 $W_1 \cap W_2$, 和集合 $W_1 \cup W_2$ をそれぞれ異なる xy 平面上に図示せよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか．x, y, z の方程式で示せ．

【演習問題：提出不要だが必ず解いてみること】

$\boxed{3}$ ［部分空間の判定］

次のベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W が部分空間であるかどうかを判定せよ．

$$(1)\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| xyz \geqq 0 \right\} \qquad (2)\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + 2y + z = 0 \right\}$$

$$(3)\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 = z^2 \right\} \qquad (4)\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{array} \right\}$$

$$(5)\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ x - 4y + 3z = 6 \\ x - 3y + 3z = -1 \end{array} \right\} \qquad (6)\ W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{l} \text{連立一次方程式} \\ \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = a \\ x - 4y + 3z = b \\ x - 3y + 3z = c \end{array} \right. \\ \hfill \text{が解を持つ．} \end{array} \right\}$$

$\boxed{4}$ ［生成される部分空間］

次のそれぞれの部分空間 W に対して，与えられた $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が W に属するか判定せよ．ただし，(2) は $\boldsymbol{v} \in W$ となるための a, b, c の条件を求めよ．

$$(1)\ W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$(3)\ W = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(4)\ W = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^4, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{5}$ ［**共通部分と和空間**］

(1) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか述べよ．また和集合 $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではないことを確認せよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2$, 和空間 $W_1 + W_2$ はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 内のどのような図形になるか述べよ．また和集合 $W_1 \cup W_2$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではないことを確認せよ．