数学演習第二　第 3 回　「ベクトル空間・部分空間」　解答例 (2021.10.27 実施)

$\boxed{\mathbf{1}}$ **(小テスト)** 部分空間となる条件は，**【要点】**の**〈部分空間の条件〉(i), (ii), (iii)** を満たすことである．逆に言えば，部分空間とならないことを示すには条件 **(i), (ii), (iii)** のいずれかひとつを満たさない具体的な反例をあげればよい．

(1) $\mathbf{0} \notin W$ より条件 (i) が不成立．よって選択肢は **(イ)**

(2) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = y = 0 \right\} = \{\mathbf{0}\}$ となるが，$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ より，W は部分空間になる．よって選択肢は **(ア)**

(3) $\mathbf{0} \in W$．$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$ のとき，$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) = (ax_1+by_1+cz_1)+(ax_2+by_2+cz_2) = 0$ だから，$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix} \in W$．また，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W, k \in \mathbb{R}$ に対し，$a(kx)+b(ky)+c(kz) = k(ax+by+cz) = 0$ より，$k\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{bmatrix} \in W$．以上により条件 (i), (ii), (iii) 全てを満たすので，選択肢は **(ア)**

(4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$ だが，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W$ より条件 (ii) が不成立．よって選択肢は **(ウ)**

$\boxed{\mathbf{2}}$ **(レポート課題)** (1) $\left[\begin{array}{cc|c|c} -4 & 8 & 3 & 12 \\ 5 & -10 & -6 & -15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$，$\boldsymbol{w} \in W$．

(2) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -13 & -6 \\ 0 & -3 & a-2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6/13 \\ 0 & 0 & (8-13a)/39 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \in W$ となるためには $a = 8/13$.

(3) W_1 は直線 $y = \frac{1}{2}x$ (図 1)．W_2 は直線 $y = -2x$ (図 2)．共通部分 $W_1 \cap W_2$ は 2 直線の交点である原点のみ (図 3)．和集合 $W_1 \cup W_2$ は 2 直線を併せたもの全体 (図 4).

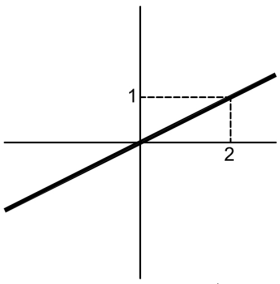

図 1 $W_1 : y = \frac{1}{2}x$

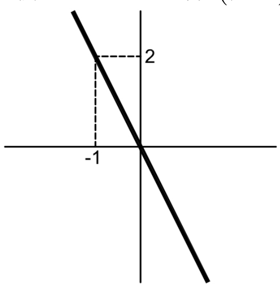

図 2 $W_2 : y = -2x$

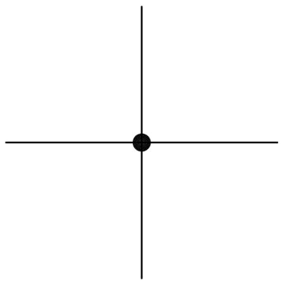
図 3 $W_1 \cap W_2$

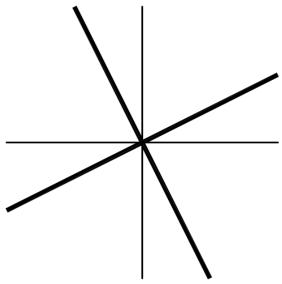
図 4 $W_1 \cup W_2$

(4) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は，$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & -2x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & -2x-\frac{1}{2}y+z \end{array}\right]$ だから，W_1 は平面 $\underline{4x+y-2z=0}$ である．別の見方をすると，$W_1 = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ は，$\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ によって張られる平面なので，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする原点を通る平面 $4x+y-2z=0$ である．

同様に W_2 についても，$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -2x+y \\ 0 & -2 & -3x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -2x+y \\ 0 & 0 & -x-y+z \end{array}\right]$ より，W_2 は平面 $\underline{x+y-z=0}$. これも外積 $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ からもわかる．

共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 4x+y-2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ の解全体に一致するから，$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{bmatrix}$ から，$W_1 \cap W_2$ に属する元は $k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ となる．これは原点を通り方向ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ の直線なので，ベクトル表示の方程式 (パラメーター表示) は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ となるが，x, y, z のみを用いた方程式としては $\underline{\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}}$ となる．言い換えると，2 つの平面 W_1, W_2 の交線は W_1, W_2 の法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ のいずれとも垂直であるから，$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする原点を通る直線なので，上のような方程式となる．

【演習問題】

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ だが，その -1 倍は $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない.

(2) $\mathbf{0}$ を含み，$x + 2y + z = 0$ のとき $(kx) + 2(ky) + (kx) = 0$ が成り立つからスカラー倍に関して閉じており，さらに $x' + 2y' + z' = 0$ のとき，$(x + x') + 2(y + y') + (z + z') = (x + 2y + z) + (x' + 2y' + z') = 0$ なので和に関しても閉じている．よって部分空間.

(3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ にも関わらずその和 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin W$ なので部分空間ではない.

(4) (2) と同じようにして確認できるが，(2)(4) はいずれも同次形連立一次方程式の解空間なので部分空間である（**教科書 命題 15.4**）.

(5) $\mathbf{0}$ が属していないので部分空間ではない.

(6)　まず $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$ は解 $x = y = z = 0$ を持つから，$\mathbf{0} \in W$．また，$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ x - 4y + 3z = b \\ x - 3y + 3z = c \end{cases}$ が解 $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ を持つとき，$x = kx_0, y = ky_0, z = kz_0$ とすれば $\begin{cases} x + 2y + 3z = ka \\ x - 4y + 3z = kb \\ x - 3y + 3z = kc \end{cases}$ の解になる．つまり $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in W$ のとき，$\begin{bmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{bmatrix} \in W$ となるから，スカラー倍に関して閉じている．さらに，$\begin{cases} x + 2y + 3z = a' \\ x - 4y + 3z = b' \\ x - 3y + 3z = c' \end{cases}$ が解 $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ を持つとき，$x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1, z = z_0 + z_1$ とすれば $\begin{cases} x + 2y + 3z = a + a' \\ x - 4y + 3z = b + b' \\ x - 3y + 3z = c + c' \end{cases}$ の解になる．つまり，つまり $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \in W$ のとき，$\begin{bmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{bmatrix} \in W$ となるから，和に関して閉じている．よって W は部分空間.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -9 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 13 & 13 \\ 0 & 1 & 5 & -22 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \in W$，$\boldsymbol{w} \notin W$.

(2) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 4 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b - 2a \\ 0 & 5 & -1 & c - 4a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 5 & -1 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & -b + c - 2a \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \in W \Leftrightarrow 2a + b - c = 0$.

(3) $\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 6 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \in W$，$\boldsymbol{w} \notin W$.

(4) $\left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{v} \notin W$，$\boldsymbol{w} \in W$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となるための条件は，$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -4 & x+y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & x+y+4z \end{array}\right]$ より，$x+y+4z=0$ である．これは W_1 が平面 $x+y+4z=0$ であることを意味している．図形的に見ると，W_1 に属する元は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を用いて $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$ と表される元全体なので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ と直交するベクトルすなわち外積ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとし，原点を通る．ここからも W_1 は平面 $x+y+4z=0$ とわかる．

同様に $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -3 & 4 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 3x+y-4z \end{array}\right]$ より，W_2 は平面 $3x+y-4z=0$ となる．これは $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \,/\!/\, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ に直交する平面である．

$W_1 \cap W_2$ は，2 つの平面の共通部分なので，$x+y+4z=0$ と $3x+y-4z=0$ を連立させると，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ より，$W_1 \cap W_2$ に属する元は $k\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は実数) と表せる．これは方向ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ の直線を表す．図形的には $W_1 \cap W_2$ に属する元は，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ の両方と直交するので，外積ベクトル $(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix} \,/\!/\, \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする直線になる．

また，和空間は $\mathbb{R}^3$ に一致する．なぜなら，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -4 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & -3 & 4 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & -2 & 8 & x+y+4z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & -\frac{3x+y+12z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -\frac{x+y+4z}{2} \end{array}\right]$ となるので，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\dfrac{3x+y+12z}{2}\boldsymbol{a}_1 + z\boldsymbol{a}_2 - \dfrac{x+y+4z}{2}\boldsymbol{a}_3$ と表せることがわかる．よって $\mathbb{R}^3$ のどんな元も $W_1 + W_2$ に属する．

最後に，和集合 $W_1 \cup W_2$ が部分空間ではないことは，例えば，平面 $W_1 : x+y+4z=0$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $W_2 : 3x+y-4z=0$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ の和 $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ が，$x+y+4z=0$ 上にも $3x+y-4z$ 上にもないことからわかる．

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ となる条件は，$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -5 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & -6 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 2x+3y+z \end{array}\right]$ より，$2x+3y+z=0$. つまり，W_1 は平面 $2x+3y+z=0$ を表している．別の見方をすると，$W_1 = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ は，$\mathbb{R}^3$ 内で $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ によって張られる平面であるから，$\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ と垂直で原点を通る平面 $2x+3y+z=0$ となる．

同様に W_2 についても，$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 2 & x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & 3x-2y+z \end{array}\right]$ より，W_2 は平面 $3x-2y+z=0$.

外積 $\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ からもわかる．

共通部分 $W_1 \cap W_2$ は連立一次方程式 $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ の解全体に一致するから，$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 13 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$ から，$W_1 \cap W_2$ に属する元は，$k \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ となる．これは，原点を通り，方向ベクトル $\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 13 \end{bmatrix}$ の直線である．別の見方をすると，2 つの平面 W_1, W_2 の交線は，W_1, W_2 の法線ベクトル $\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4$ のいずれとも垂直であるから，$(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \times (\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_4) = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -26 \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとし，原点を通る直線となる．

また，$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & -5 & -1 & 2 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & -6 & -2 & 2 & -x+z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 2x+3y+z \end{array}\right]$ から，$\mathbb{R}^3$ のどんなベクトルも $W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ に属することがわかるので，$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$．なお，$W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならないことは，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が平面 $W_1 : 2x+3y+z=0$ 上にも平面 $W_2 : 3x-2y+z=0$ 上にもないため，$W_1 \cup W_2$ に属さないことからわかる．