2021 年度数学演習第二

演習第４回　微積：偏微分［１］（偏微分，合成関数の微分）

2021 年 11 月 10 日　実施

0　概要

多変数関数 (教科書 p.79)

まず 2 変数関数を定義する.

▶ 定義

x と y に値をを与えると z の値が決まるとき, z は x と y の関数であるといい, $z = f(x, y)$ などと書き表す.

例　$z = f(x, y) = x^2 - xy^2$ とすると, z は x, y の 2 変数関数である.

多変数関数の極限 (教科書 p.80)

次に 2 変数関数の極限を考える.

▶ 定義

関数 $f(x, y)$ を考える．xy 平面上の点 (x, y) を点 (a, b) にどのように近づけても関数 $f(x, y)$ の値が l に近づくとき, l を関数 $f(x, y)$ の点 (a, b) における極限 (値) といい 1 変数の時と同様に, 次のように記す

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = c \tag{1}$$

◎極限が存在しないことを言うには，近づき方により発散したり極限が異なったりすることを言えばよい.

例　$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + 2y^2}$ の極限を調べる.

$x = 0$ に沿った極限は

$$\lim_{x=0,y\to 0} \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + 2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-2y^2}{2y^2} = -1 \tag{2}$$

$y = 0$ に沿った極限は

$$\lim_{y=0,x\to 0} \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 + 2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \tag{3}$$

よって $x = 0$ と $y = 0$ に沿った極限が異なるので，極限は存在しない.

偏微分 (教科書 p.83)

次に 2 変数関数の偏微分を定義する.

▶ 定義

関数 $f(x, y)$ を考える．このとき次を定義する.

1. $y = b$ と固定した 1 変数関数 $f(x, b)$ の点 $x = a$ における微分係数を，点 (a, b) における $f(x, y)$ の x に関する偏微分係数といい $f_x(a, b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ のように記す.
2. $f_x(x, y)$ を (a, b) の関数とみたものを $f(x, y)$ の x に関する偏導関数と言い $f_x(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ のように記す.
3. y に関しても同様に定義する.
4. さらに $f_x(x, y)$ 自身は (x,y) の関数なのでその x に関する偏導関数を $f_{xx}(x, y)$，y に関する偏導関数を $f_{xy}(x, y)$ が定義できる.
   同様に $f_{yy}(x, y)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}\right)$，$f_{yx}(x, y)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$ が定義できる.

例　$f(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^3 - 2xy$ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2xy^2 - 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2y + 3y^2 - 2x \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 12x^2 - 2y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy - 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -2x^2 + 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy - 2 \tag{5}$$

合成関数の導関数 (教科書 p.86)

次に 2 変数関数の合成関数の導関数について考えよう.

▶ **定理**

関数 $f(x, y)$，$x = \varphi_1(t), y = \psi(t)$ を考える．このとき合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ に関して次が成立する.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d\psi}{dt} \tag{6}$$

例　$z = \log(x^2 + 2y^2 + 1), x = t^2, y = -t$ とすると

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{7}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 2y^2 + 1} \cdot (2t) + \frac{4y}{x^2 + 2y^2 + 1} \cdot (-1) \tag{8}$$

$$= \frac{2t^2}{t^4 + t^2 + 1} \cdot (2t) + \frac{-4t}{t^4 + t^2 + 1} \cdot (-1) \tag{9}$$

$$= \frac{4t(t^2 + 1)}{t^4 + t^2 + 1} \tag{10}$$

合成関数の偏導関数 (教科書 p.87)

次に 2 変数関数の合成関数の偏導関数について考える.

▶ **定理**

関数 $f(x, y)$，$x = \varphi(u, v)$，$y = \psi(u, v)$ を考える．このとき合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ に関して次

の関係が成立する．

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial u} \tag{11}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial v} \tag{12}$$

例　$z = e^{xy}, x = -u^2 v, y = u + v^2$ とすると

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{13}$$

$$= ye^{xy} \cdot (-2uv) + xe^{xy} \cdot (1) \tag{14}$$

$$= \left\{-u^2 v - 2uv(u + v^2)\right\} e^{-u^2 v(u+v^2)} \tag{15}$$

$$= -uv\left(3u + 2v^2\right) e^{-u^2 v(u+v^2)} \tag{16}$$

接平面 (教科書 p.89)

次に偏微分を用いて接平面を定義する．

▶ **定理**

曲面 $S : z = f(x, y)$ 上の点 $P(a, b, f(a, b))$ において，S の接平面は次で与えられる

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \tag{17}$$

▶ **定理**　曲面上の点 $P(a, b, f(a, b))$ における接平面に垂直な直線を，その曲面の P における法線といい，次で与えられる．

$$\frac{x - a}{f_x(a, b)} = \frac{y - b}{f_y(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1} \tag{18}$$

ヤコビアン (教科書 p.87)

後に学習する重積分で必要になるので次にヤコビアンを記す．

▶ **定義**

関数 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ を考えたとき x, y の u, v に関するヤコビアンを次で定義する (ここに det は determinant つまり，行列式).

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{19}$$

例　$x = 2u - 3v + 1, y = 3u - v + 2$ とするときヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ は

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 7 \tag{20}$$

1　小テスト問題

問 $\boxed{1}$ $f(x,y) = x\sinh(xy) - \cosh(xy)$ に対して偏導関数 f_x を次から選択せよ.

（ア）$\underline{(1+xy)\sinh(xy) - y\cosh(xy)}$　　（イ）$\underline{(1+y)\sinh(xy) + xy\cosh(xy)}$

（ウ）$\underline{\sinh(xy) + x\cosh(y) + y\sinh(y)}$　　（エ）$\underline{(1-y)\sinh(xy) + xy\cosh(xy)}$

問 $\boxed{2}$ $f(x,y) = x\sinh(xy) - \cosh xy$ に対して偏導関数 f_y を次から選択せよ.

（ア）$\underline{x^2\cosh(xy) - x\sinh(xy)}$　　（イ）$\underline{x^2\sinh(xy) - x\cosh(xy)}$

（ウ）$\underline{x^2\cosh(xy) + x\sinh(xy)}$　　（エ）$\underline{x^2\sinh(xy) + x\cosh(xy)}$

問 $\boxed{3}$ 曲面 $S: z = x^2y + xy^2$ の $(x,y,z) = (1,2,6)$ における接平面の式を次から選択せよ.

（ア）$\underline{z-1 = 8(x-2) + 3(y-6)}$　　（イ）$\underline{z-6 = 8(x-1) + 5(y-2)}$

（ウ）$\underline{6(z-6) = x-1 + 2(y-2)}$　　（エ）$\underline{z-6 = 3(x-1) + 8(y-2)}$

問 $\boxed{4}$ $x = 5u + 2v, y = -3u + v$ とする時, ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ の値として正しいものを次から選択せよ.

（ア）$\underline{5}$　　（イ）$\underline{-11}$

（ウ）$\underline{11}$　　（エ）$\underline{-5}$

2　レポート課題

問 $\boxed{1}$ $z = \sin(x^2y),\ \ x = t+1,\ \ y = \dfrac{1}{t^2+1}$ とするとき合成関数の微分を使って $\dfrac{dz}{dt}$ の $t=2$ における値を求めよ.

問 $\boxed{2}$ $z = \cos^2(xy),\ \ x = u^2 + v,\ \ y = u + v^2$ とするとき合成関数の微分を使って $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ の $(u,v) = (1,2)$ における値を求めよ.

問 $\boxed{3}$ $x = e^{u^2v},\ \ y = \log(u^2 + v^2 + 1)$ とするときヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

問 $\boxed{4}$ $z = \mathrm{Sin}^{-1}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right)$ の点 $\left(1, 1, \dfrac{\pi}{6}\right)$ における法線の方程式を求めよ.

3　他の問題

$\boxed{1}$ 次の関数 $f(x,y)$ について, 1 次と 2 次の偏導関数 $(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy})$ を全て求めよ.

(1) $f(x,y) = e^x \cos^2 y - e^y \sin^2 x$　(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+xy+y^2}$　(3) $f(x,y) = \log_x y$

(4) $f(x,y) = \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{y}{x}$　$(|y| < x)$　(5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

$\boxed{2}$ $f(x,y)$ に 1 変数関数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ を合成した 1 変数関数 $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ の導関数 $g'(t)$ を求めよ (演習書 問題 5.2.1 (1) 他).

(1) $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$,　$\varphi(t) = 2t$,　$\psi(t) = 1 - t^2$

(2) $f(x,y) = \log_e(1 + x^2 + 3y^2)$,　$\varphi(t) = t^2 + 1$,　$\psi(t) = t^3 + 1$

$\boxed{3}$ $f(x,y)$ に 2 変数関数 $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ を合成した 2 変数関数 $g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ の偏導関数 $g_u(u,v), g_v(u,v)$ をそれぞれ求めよ.

(1) $f(x,y) = y^x$,　$\varphi(u,v) = \dfrac{v}{u}$,　$\psi(u,v) = u^2 + v^2$

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,　$\varphi(u,v) = u\cos v$,　$\psi(u,v) = u\sin v$

$\boxed{4}$ 次の変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}$ を求めよ.

(1) $x = u^3 + 3v^2$,　$y = v^3 + 3u^2$　(2) $x = r\cos^3 t$,　$y = r\sin^3 t$

$\boxed{5}$ 次の曲面の，与えられた点における接平面と法線の方程式を求めよ.

(1) $z = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{x}{y}$　$(1,1,3)$　(2) $z = \log(2x^2 - y - 6)$　$(2,1,0)$

$\boxed{6}$ 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ について，3 種類の極限値

(a) $\displaystyle\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big)$　(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

がそれぞれ存在するか否かを調べよ．つまり，存在すれば，その値を計算し，そうでなければ，その理由を述べよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$　(2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(3) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　(4) $f(x,y) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{1}{y}\right) & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$