

2021年度数学演習第二 【解答例】

演習第4回 微積：偏微分 [1] (偏微分，合成関数の微分)

2021年11月10日 実施

1 小テスト問題の解答

問 1

$$\begin{aligned} f_x &= \sinh(xy) + xy \cosh(xy) - y \sinh(xy) \\ &= (1-y) \sinh(xy) + xy \cosh(xy) \end{aligned}$$

よって答えは(エ)。

問 2

$$f_y = x^2 \cosh(xy) - x \sinh(xy)$$

よって答えは(ア)。

問 3

$$\begin{aligned} z_x &= 2xy + y^2, z_y = x^2 + 2xy \text{ であるから} \\ z_x(1, 2) &= 8, z_y(1, 2) = 5 \text{ なので} \\ z - 6 &= 8(x-1) + 5(y-2) \text{ となる.} \end{aligned}$$

よって答えは(イ)。

問 4

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 11$$

よって答えは(ウ)。

2 レポート課題の解答

問 1

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2xy \cos(x^2y) \cdot 1 + x^2 \cos(x^2y) \cdot \left(-\frac{2t}{(t^2+1)^2}\right)$$

よって求める値は

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} \cos\left(\frac{9}{5}\right) + 9 \cos\left(\frac{9}{5}\right) \left(-\frac{4}{25}\right) = \underline{-\frac{6}{25} \cos\left(\frac{9}{5}\right)}$$

問 2

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = -2y \sin(xy) \cos(xy) \cdot 1 - 2x \sin(xy) \cos(xy) \cdot 2v$$

ここで $u = 1, v = 2$ であるとき $x = 3, y = 5$ であるので求める値は

$$-10 \sin(15) \cos(15) - 6 \sin(15) \cos(15) \cdot 4 = -34 \sin(15) \cos(15) = \underline{-17 \sin(30)}$$

問 3

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2uv e^{u^2v} & u^2 e^{u^2v} \\ \frac{2u}{u^2+v^2+1} & \frac{2v}{u^2+v^2+1} \end{pmatrix} = \frac{2u(2v^2 - u^2)e^{u^2v}}{u^2 + v^2 + 1}$$

問 4

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right)^2}} \cdot \left\{ \frac{2x}{x^2+y^2+2} - \frac{2x(x^2+1)}{(x^2+y^2+2)^2} \right\}, f_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2+1}{x^2+y^2+2}\right)^2}} \cdot \left\{ -\frac{2y(x^2+1)}{(x^2+y^2+2)^2} \right\}$$

より $f_x(1, 1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}, f_y(1, 1) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$. よって求める法線の方程式は $\frac{x-1}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \frac{y-1}{-\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \frac{z-\frac{\pi}{6}}{-1}$.

これを整理すると $\underline{\frac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{y-1}{-\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{z-\frac{\pi}{6}}{-1}}$.

3 他の問題の解答

1

- (1) $f_x(x, y) = e^x \cos^2 y - 2e^y \sin x \cos x$, $f_y(x, y) = -e^y \sin^2 x - 2e^x \sin y \cos y$,
 $f_{xx}(x, y) = 2e^y(\sin^2 x - \cos^2 x) + e^x \cos^2 y$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -2(e^y \sin x \cos x + e^x \sin y \cos y)$,
 $f_{yy}(x, y) = -e^y \sin^2 x + 2e^x(\sin^2 y - \cos^2 y)$. $\sin 2x, \sin 2y, \cos 2x, \cos 2y$ を用いて表現してもよい.

(2) $f_x(x, y) = \frac{2x + y}{2\sqrt{x^2 + xy + y^2}}$, $f_y(x, y) = \frac{x + 2y}{2\sqrt{x^2 + xy + y^2}}$,
 $f_{xx}(x, y) = \frac{3y^2}{4(x^2 + xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -\frac{3xy}{4(x^2 + xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy}(x, y) = \frac{3x^2}{4(x^2 + xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(3) $f(x, y) = \frac{\log_e y}{\log_e x}$ より, $f_x(x, y) = -\frac{\log y}{x(\log x)^2}$, $f_y(x, y) = \frac{1}{y \log x}$, $f_{xx}(x, y) = \frac{\log y}{x^2(\log x)^2} + \frac{2 \log y}{x^2(\log x)^3} = \frac{(\log x + 2) \log y}{x^2(\log x)^3}$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -\frac{1}{xy(\log x)^2}$, $f_{yy}(x, y) = -\frac{1}{y^2 \log x}$.

(4) $|y| < x$ (特に $x > 0$) に注意して, $f_x(x, y) = \frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$, $f_y(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$,
 $f_{xx}(x, y) = \frac{y^3 - 2x^2y}{x^2(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{y}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy}(x, y) = -\frac{y}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(5) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき, $(x^2 + y^2)f = x^3y - xy^3$ の両辺を x で偏微分すると, $2xf + (x^2 + y^2)f_x = 3x^2y - y^3$, $(x^2 + y^2)^2 f_x = (3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x^2y(x^2 - y^2)$ より, $f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$

が従う. 同様にして, $f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$ を得る. $(x, y) = (0, 0)$ のとき, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ が定義から容易にわかる. 次に, 2次偏導関数を計算する. $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき,

$(x^2 + y^2)^2 f_x = y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)$ の両辺を x で偏微分すると, $4x(x^2 + y^2)f_x + (x^2 + y^2)^2 f_{xx} = 4xy(x^2 + 2y^2)$, $(x^2 + y^2)^3 f_{xx} = 4xy\{(x^2 + 2y^2)(x^2 + y^2) - (x^4 + 4x^2y^2 - y^4)\}$ より, $f_{xx}(x, y) = \frac{4xy^3(-x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$ を得る. 同様にして, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} =$

$\frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3}$, $f_{yy}(x, y) = \frac{4x^3y(-3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$. $(0, 0)$ での値を求めるために, 上の計算結果から, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_x(x, 0) = 0$ ($x \neq 0$), $f_x(0, y) = -y$ ($y \neq 0$),

$f_y(x, 0) = x$ ($x \neq 0$), $f_y(0, y) = 0$ ($y \neq 0$) であることに注意する. これらを用いて, $f_{xx}(0, 0) = 0$, $f_{xy}(0, 0) = -1$, $f_{yx}(0, 0) = 1$, $f_{yy}(0, 0) = 0$ が導かれる. よって, $f(x, y)$ は $((0, 0)$ を除いた領域

で C^2 級であるが $(0, 0)$ の近傍で C^2 級でない. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが, 極限值 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xx}(x, y)$,

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{yy}(x, y)$ はいずれも存在しない (平面の極座標を使えば示せる). ここでの $f(x, y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) の有名な一例である.

- 2 $z = f(x, y)$ と $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ の合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t)) (= g(t)$ とおく) の微分に関する連鎖律

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{あるいは} \quad g'(t) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

を適用する解答例を与える.

$$(1) f_x(x, y) = \frac{(y/x)_x}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, f_y(x, y) = \frac{(y/x)_y}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \varphi'(t) = 2, \psi'(t) = -2t \text{ より,}$$

$$g'(t) = -\frac{1-t^2}{(2t)^2 + (1-t^2)^2} \cdot 2 + \frac{2t}{(2t)^2 + (1-t^2)^2} \cdot (-2t) = \frac{-(2-2t^2) - 4t^2}{t^4 + 2t^2 + 1} = -\frac{2}{t^2 + 1}$$

【補足】 実は, $g(t) = \pm \frac{\pi}{2} - 2 \tan^{-1} t$ ($t \geq 0$) である. 実際, $\theta = \tan^{-1} t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ とおけば $t = \tan \theta$ であるから, 倍角の公式を用いて $\tan(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1-t^2}{2t}$. よって, $t > 0$ ($\Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$) のとき, $\tan^{-1} \frac{1-t^2}{2t} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$. また, $t < 0$ ($\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{3\pi}{2}$) のとき, $\tan^{-1} \frac{1-t^2}{2t} = -\frac{\pi}{2} - 2\theta$.

$$(2) f_x(x, y) = \frac{(1+x^2+3y^2)_x}{1+x^2+3y^2} = \frac{2x}{1+x^2+3y^2}, f_y(x, y) = \frac{(1+x^2+3y^2)_y}{1+x^2+3y^2} = \frac{6y}{1+x^2+3y^2}, \varphi'(t) = 2t, \psi'(t) = 3t^2 \text{ より, } g'(t) = \frac{2(t^2+1) \cdot 2t + 6(t^3+1) \cdot 3t^2}{1+(t^2+1)^2+3(t^3+1)^2} = \frac{18t^5+4t^3+18t^2+4t}{3t^6+t^4+6t^3+2t^2+5}$$

- 3 $z = f(x, y)$ と $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ の合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) (= g(u, v)$ とおく) の微分の連鎖律

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{cases} g_u(u, v) = f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_u(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_u(u, v) \\ g_v(u, v) = f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_v(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_v(u, v) \end{cases}$$

を適用する解答例を与える.

$$(1) f(x, y) = y^x = e^{x \log y} \text{ だから, } f_x(x, y) = y^x \log y, f_y(x, y) = xy^{x-1}. \text{ さらに } \varphi_u(u, v) = -v/u^2, \varphi_v(u, v) = 1/u, \psi_u(u, v) = 2u, \psi_v(u, v) = 2v \text{ だから, } g_u(u, v) = (u^2 + v^2)^{v/u} \log(u^2 + v^2) \cdot \left(-\frac{v}{u^2}\right) + \frac{v}{u} (u^2 + v^2)^{(v/u)-1} \cdot 2u = v(u^2 + v^2)^{(v/u)-1} \left\{ -\frac{u^2 + v^2}{u^2} \log(u^2 + v^2) + 2 \right\}, g_v(u, v) = \frac{v^2}{u} (u^2 + v^2)^{(v/u)-1} \left\{ \frac{u^2 + v^2}{v^2} \log(u^2 + v^2) + 2 \right\}.$$

ただし, $g(u, v) = (u^2 + v^2)^{v/u}$ を u, v でそれぞれ偏微分することもできる.

$$(2) f_x(x, y) = \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, f_y(x, y) = -\frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \varphi_u(u, v) = \cos v, \varphi_v(u, v) = -u \sin v, \psi_u(u, v) = \sin v, \psi_v(u, v) = u \cos v \text{ より, } g_u(u, v) = \frac{4 \cos v \sin^2 v}{u} \cos v + \frac{-4 \cos^2 v \sin v}{u} \sin v = 0 \text{ と, } g_v(u, v) = \frac{4 \cos v \sin^2 v}{u} (-u \sin v) + \frac{-4 \cos^2 v \sin v}{u} (u \cos v) = -4 \cos v \sin v \text{ を得る. ただし, } g \text{ の偏導関数を計算するだけなら } g(u, v) = \cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v \text{ と変形してから直接偏微分の方が簡単である.}$$

$$4 (1) \frac{\partial x}{\partial u} = 3u^2, \frac{\partial x}{\partial v} = 6v, \frac{\partial y}{\partial u} = 6u, \frac{\partial y}{\partial v} = 3v^2 \text{ より, } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 3u^2 & 6v \\ 6u & 3v^2 \end{pmatrix} = 9uv(uv - 4).$$

$$(2) \frac{\partial x}{\partial r} = \cos^3 t, \frac{\partial x}{\partial t} = -3r \cos^2 t \sin t, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin^3 t, \frac{\partial y}{\partial t} = 3r \sin^2 t \cos t, \text{ より, } \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = 3r \sin^2 t \cos^2 t.$$

【5】 $z = f(x, y)$ とする.

(1) $f_x = -\frac{2y}{x} + \frac{1}{y}$ より, $f_x(1, 1) = -1$. $f_y = \frac{2}{x} - \frac{x}{y^2}$ より, $f_y(1, 1) = 1$. よって求める接平面の方程式は

$$z-3 = -(x-1)+(y-1) \text{ を整理して } x-y+z = 3. \text{ また求める法線の方程式は } x-1 = \frac{y-1}{-1} = z-3.$$

(2) $f_x = \frac{4x}{2x^2 - y - 6}$ より, $f_x(2, 1) = 8$. $f_y = \frac{-1}{2x^2 - y - 6}$ より, $f_y(2, 1) = -1$. よって求める接平面の方程式は

$$z = 8(x-2)-(y-1) \text{ を整理して } 8x-y-z = 15. \text{ また求める法線の方程式は } \frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

【6】 一般に, 3 種類の極限には論理的な関係はないので, (a) の極限または (b) の極限が存在しないことから, (c) の極限が存在しないとは云えないし, (c) の極限が存在しても, (a) の極限や (b) の極限が存在すると結論付けられない.

(1) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. 一方, (x, y) を x 軸に沿って原点に近づけたときの $f(x, y)$ の極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$ と y 軸に沿って原点に近づけたときの極限 $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1$ が異なるので (c) の極限は存在しない.

(2) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$. (c) の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) が有効で, このとき $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ は $r \rightarrow 0$ と同じことなので, あたかも (θ をパラメータと見なして) r の 1 変数関数のように扱える. 実際, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと, $f(x, y) = \cos \theta \sin \theta = (1/2) \sin 2\theta$ は区間 $[-1/2, 1/2]$ の任意の値を取り得るから, (c) の極限は存在しない.

(3) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{|y|} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{|x|} = 0$. (c) の極限については (2) と同様に, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおいて, $|f(x, y)| = (r/2)|\sin 2\theta| \leq r/2 \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$). よって, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

(4) $|f(x, y)| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ から, $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ がわかる. 一方, $x \neq 0$ として, 例えば $y = 1/n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を考えると, $n \rightarrow \infty$ のとき, $y = 1/(n\pi) \rightarrow +0$ で, $f(x, 1/(n\pi)) = (-1)^n x$ なので, $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ ($x \neq 0$) は存在しない. よって, (b) の極限は存在しない.

【補足】 例えば, 【1】(5) のような場面で, (a) や (b) の極限は自然に現れる. 実際, 【1】(5) では

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k)}{hk} \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \right) = -1,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, k)}{hk} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \right) = 1.$$

一般に, $g(tx, ty) = g(x, y)$ ($t \neq 0$), $g(1, 0) \neq g(0, 1)$ をみたす $(x, y) \neq (0, 0)$ での C^2 級関数 $g(x, y)$ を用いて, $f(x, y) = xy g(x, y)$ ($(x, y) \neq (0, 0)$), $= 0$ ($(x, y) = (0, 0)$) と定めれば, $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ が成り立つ.