

# 2021年度数学演習第二 【解答例】

演習第5回 一次独立・一次従属, 基底と次元

2021年11月17日 実施

## 1. 小テスト問題の解答

問 1

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 13 & 12 \\ 4 & 15 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 2 & 13 & -7 \\ 4 & 15 & -25 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{a}_3 \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 2 & 13 & 13 \\ 4 & 15 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{a}_4 \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 2 & 13 & 5 \\ 4 & 15 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって答えは 4.

問 2

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 9 & 10 & 10 \\ 2 & 1 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & -5k+16 \end{bmatrix}$$

よって答えは 2.

問 3

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-4 \end{bmatrix}$$

よって答えは 3.

問 4

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+3y-5z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases} \text{ の係数行列は } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ であるので}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって答えは 1.

## 2. レポート課題の解答

問 1

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は一次独立.

よって  $W_1$  は 3 次元.

問 2  $2x + 3y + 5z = 0$  より  $x = -\frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z$  であるので  $2x + 3y + 5z = 0$  の解は 
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

よって  $W_2$  は 2 次元.

問 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 26 & a \\ -2 & -6 & -24 & b \\ 5 & -9 & 12 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -9a - 9b + 2c \\ 0 & 1 & 2 & -5a - 5b + c \\ 0 & 0 & 0 & -48a - 47b + 10c \end{bmatrix}$$

よって連立一次方程式  $\begin{cases} 3x + 4y + 26z = a \\ -2x - 6y - 24z = b \\ 5x - 9y + 12z = c \end{cases}$  が解を持つ条件は  $c = \frac{24}{5}a + \frac{47}{10}b$  であるので  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in W_3$

であるためには  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{24}{5} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{47}{10} \end{bmatrix}.$

よって  $W_3$  は 2 次元.

問 4

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって  $[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$  とすると  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 13 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}$  ( $c$  は任意定数).

よって求める非自明な一次関係式は  $13\mathbf{a}_1 - 10\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}.$

### 3. 他の問題の解答

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{より, } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \text{ は一次従属で, 非}$$

$$\text{自明な一次関係式のひとつは } -7\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}. \quad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \text{より, } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \text{ は一次従属で, 非自明な一次関係}$$

式のひとつは  $-\frac{7}{6}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \frac{1}{6}\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ . 分母を払って  $7\mathbf{a}_1 + 6\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - 6\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$  でも可.

$$(3) \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -10 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{よ}$$

り,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  は一次従属で, 非自明な一次関係式のひとつは  $2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 9\mathbf{a}_3 - 10\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ .

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{より, } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \text{ は一次独立.}$$

$\boxed{2} \quad (1)(i) \quad c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = c_1(\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) + c_2(\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3) + c_3(3\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) = (c_1 + c_2 + 3c_3)\mathbf{v}_1 + (5c_1 + 7c_2 + 7c_3)\mathbf{v}_2 + (-2c_1 - 3c_2 - 2c_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  は一次独立だ

から,  $\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ 5c_1 + 7c_2 + 7c_3 = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$ . これは,  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ .  $\boxed{1}(1)$  からこの連立一

次方程式の係数行列を簡約化すると,  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 従って, 例えば  $k = 1$  とすれば,

$-7\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$  という非自明な一次関係式が得られるので,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は一次従属. (ii) (i) と

同様に,  $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ . 1(4) からこの連立一次方

程式の係数行列を簡約化すると単位行列なので,  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ . よって,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  は一次独立.

(2) (1) と同様に,  $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ . ここで,

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & -3 & k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & -9 \\ 0 & 12 & k+10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{10} \\ 0 & 1 & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & k - \frac{8}{10} \end{bmatrix}$$

である. よって,  $k - \frac{4}{5} = 0$ , つま

り  $k = \frac{4}{5}$  のとき,  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{9}{10} \\ 1 \end{bmatrix}$  となるので, 例えば  $t = 1$  とすれば,  $\frac{7}{10}\mathbf{a}_1 - \frac{9}{10}\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$

という非自明な一次関係式が成り立つ. (分母を払って,  $7\mathbf{a}_1 - 9\mathbf{a}_2 + 10\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$  でも可.) 従って  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は一次従属.  $k \neq \frac{4}{5}$  のとき,  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  となるので,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は一次独立.

3  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -2 & b \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & -2 & b \\ 0 & 1 & c+2a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & c+2a \\ 0 & 0 & 4a+b+2c \end{bmatrix}$  から,  $\mathcal{E}_1$  の 2 つの列

ベクトルは一次独立だが,  $4a + 2b + 2c \neq 0$  となる  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  を一次結合で表すことがで

きないので,  $\mathbb{R}^3$  を生成しない.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a-b+c}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b-c}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+b+c}{2} \end{bmatrix}$  より,  $\mathcal{E}_2$

の 3 つの列ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  は一次独立で, 全ての  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  を含むから  $\mathbb{R}^3$  の基底.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -b \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{bmatrix}$$

より,  $\mathcal{E}_3$  の 3 つの列ベクトルは一次従

属で,  $a - b + c \neq 0$  となる  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  を一次結合で表すことができないので,  $\mathbb{R}^3$  を生成しな

$$\text{い. } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 3 & 3 & 2 & b \\ 5 & 4 & 2 & c \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2a-8b+5c}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4a+13b-7c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & a-2b+c \end{array} \right] \text{より } \mathcal{E}_4 \text{ の 3 つの列ベクトル } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$$

は一次独立で、全ての  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  を含むから  $\mathbb{R}^3$  の基底.  $\mathcal{E}_5$  も同じようにやってもよいが、

$$\boxed{1}(2) \text{ で見たように } \mathcal{E}_5 \text{ の 4 つの列ベクトルは一次従属. また } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 \text{ は一次独立なので,}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 3 & 4 & b \\ -1 & 4 & 3 & c \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-7a+10b-4c}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7a-6b+c}{7} \end{array} \right] \text{ となって, 全ての } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ を含むから, } \mathcal{E}_5$$

の 4 つの列ベクトルは  $\mathbb{R}^3$  を生成する. まとめると, (i)  $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$ . (ii)  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4$ . (iii)  $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4$ .

[注意]:  $\mathbb{R}^n$  の基底は  $n$  個の一次独立な  $n$  項列ベクトルからなる.  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  が  $\mathbb{R}^n$  の基底になるかどうかは教科書 命題 7.14 にあるように  $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$  が正則行列であるか (行列式が 0 でないか) 調べるのが簡単である. 行列式の値を調べると,  $\mathcal{E}_2$  は 2,  $\mathcal{E}_3$  は 0,  $\mathcal{E}_4$  は -3 になるので,  $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4$  が  $\mathbb{R}^3$  の基底となる.

$$\boxed{4} \text{ } W_1 \text{ の元は, } \begin{bmatrix} x \\ -2x+4z \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (} x, z \in \mathbb{R} \text{) と表せるので, } W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

この 2 つの列ベクトルは一次独立であることがチェックできるので,  $W_1$  の基底を与え,

$$\dim W_1 = 2. \text{ } W_2 \text{ は, } \boxed{3} \text{ で求めたように, } \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ だから, } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$$

は一次独立で,  $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$  という非自明な一次関係式がある. 従って,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  の一次結合は,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の一次結合で表せるから,  $W_2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ . よって  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  が基底で,  $\dim W_2 = 2$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ より, } \dim W_3 = 1 \text{ で } \left( \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ が基底. 第 3 回 } \boxed{1}(10) \text{ で見たよ}$$

$$\text{うに, } W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 5a - 2b + c = 0 \right\} \text{ である. } W_1 \text{ と同様に, } \dim W_4 = 2 \text{ で, } \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

が基底の一例. [注意]: 一般に,  $m \times n$  行列  $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$  に対し,  $\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解を持つ}\} \subset \mathbb{R}^m$  は, 第 7 回で見る  $A$  の列空間  $C(A) = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$  に一致することが示せる. これを使え

ば,  $W_3$  でみた簡約化の計算から  $\dim W_4 = 2$  と基底の一例  $\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$  が得られる.

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{より, } c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (k \in \mathbb{R}). \text{ よって } -4\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}. \text{ (2) 上の簡約行列から, } \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \text{ は一}$$

次従属なので,  $\mathcal{E}$  は基底にならない.  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$  は一次独立で,  $\mathbf{a}_3$  は  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  の一次結合で表せるので,  $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 \rangle$ . よって  $\mathcal{F}$  は基底. また, 簡約行列の 1, 3, 4 列に注目すると階数 3 だから,  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  は一次独立で,  $\mathbf{a}_2$  は  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$  の一次結合で表せるから,  $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \rangle$ . よって  $\mathcal{G}$  も基底. 同様に,  $\mathcal{H}$  も基底.

$$(3) \quad (i) \quad (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \text{ が一次独立であること. } \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{よりわかる. (ii)}$$

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in W \text{ であること. } [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{よりわかる. (2) から } \dim W = 3 \text{ とわかっていたので, 教科書}$$

**命題 18.8** に注意すれば,  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  が  $W$  を生成することも言えて,  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$  は  $W$  の基底とわかる. [注意]:  $W$  を生成することは,  $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 | \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$  を簡約化して  $\mathbf{a}_i$  が  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  の一次結合で表せることを直接示してもよい.