数学演習第二 （演習第 6 回）

微積：偏微分 [2](多変数のテーラーの定理, 極値)

2021 年 11 月 24 日

- **小テスト** の問題は $\boxed{1}$ の 4 問です. **レポート課題** は $\boxed{2}$ の 4 問です.
- それ以外の問題は自習問題です (こちらも是非解いて下さい).
- 要点を読んでから取り組むとよいでしょう.

【要点】

演習第 4 回で多変数関数の偏微分について学んだ. 今回は多変数関数の微分の応用としてテーラー展開と極値について学習する.

2 変数関数のテーラーの定理(微積教科書 p.94)

$f(x,y)$ が開領域 D において C^n 級の関数であり, $(a,b),(a+h,b+k)\in D$ とする.(a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれているならば,

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)\cdots(*)$$

となる θ $(0<\theta<1)$ が存在する.

ここに, ${}_jC_l=\dfrac{j!}{l!(j-l)!}$ として $\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)$ は

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)=\sum_{l=0}^{j}{}_jC_l h^l k^{j-l}\frac{\partial^j f}{\partial x^l\partial y^{j-l}}(a,b)$$

と書ける.

< 具体例 >

1.$\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)$ を計算してみる.

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)&=\left(h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3h^2k\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+3hk^2\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+k^3\frac{\partial^3}{\partial y^3}\right)f(a,b)\\&=h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)+3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a,b)+3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a,b)+k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)\end{aligned}$$

2.$f(x,y)=xe^y$ の原点における 3 次までのテーラー展開を考えよう.

$$\begin{array}{lll}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0 & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=0\\[2ex] \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)=0 & \dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)=1 & \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)=0\end{array}$$

であるから、これを $(*)$ の $n=4$ の場合に代入して

$$xe^y=x+xy+\frac{1}{2}xy^2+R(x,y)$$

を得る.

極値の定義(微積教科書 p.95)

$z = f(x,y)$ が点 $\mathrm{P}(a,b)$ で極大値 $f(a,b)$ をとるとは，点 P における $f(x,y)$ の値が，P の近傍の点 (x,y) $((x,y) \neq (a,b))$ での値より大きいときにいう．すなわち，P を中心とする半径 ε の円を D_ε とし，ε を小さくとると

$$f(a,b) > f(x,y) \ \ ((x,y) \in D_\varepsilon, (x,y) \neq (a,b))$$

が成り立つときにいう．極小値についても同様である．

極値をもつ必要条件(微積教科書 p.95)

$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるならば，$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ である．

極値の判定(微積教科書 p.96)

$f(x,y)$ は C^2 級の関数であり，点 (a,b) において $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ とする． 判別式を $D = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$ と定義する．

(1) $D > 0$ とする．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ ならば，f は点 (a,b) で極小値をとる．
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ ならば，f は点 (a,b) で極大値をとる．

(2) $D < 0$ ならば，f は点 (a,b) で極値をとらない．

＜ **具体例** ＞

1. 関数 $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$ が極値をもつための必要条件を求めよ．

[**解法**]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - 4x^3 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

なのでこの 2 つの式の和から $-4\left(x^3 + y^3\right) = 0 \Leftrightarrow x = -y$

である．これを代入して $x = 0, 1, -1$ を得る．よって求める条件は $(x,y) = (0,0), (1,-1), (-1,1)$ である．

2. 関数 $f(x,y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$ の極大値，極小値を求めよ．

[**解法**]

関数 $f(x,y)$ が極値をもつためには

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4x - y + 2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x - 2y - 3 = 0$$

が必要条件である．これを満たす (x,y) は $(x,y) = (1,-2)$ である．次に，この点の極大・極小を判定する．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2) = -4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1,-2) = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-2) = -2$$

であるから，判別式の値は

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1,-2)\right)^2 = (-4)(-2) - (-1)^2 = 7 > 0$$

でかつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-2) = -4 < 0$ であるから点 $(1,-2)$ で関数 f は極大値 $f(1,-2) = 5$ をとる．

【小テスト，レポート課題】

$\boxed{1}$ (小テスト)

関数 $f(x,y)$ についてそれぞれの問いに答えよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{e^{-x}}{1+y^2}$ の原点におけるテーラー展開をした時、xy の項の係数を次の中から選べ.

選択肢　1. $\underline{-1}$　2. $\underline{0}$　3. $\underline{1}$　4. $\underline{\frac{1}{2}}$

(2) $f(x,y) = \log\left(x + \sqrt{1+2y}\right)$ の原点におけるテーラー展開をした時、y の項の係数を次の中から選べ.

選択肢　1. $\underline{-1}$　2. $\underline{0}$　3. $\underline{1}$　4. $\underline{2}$

(3) $f(x,y) = x^2e^y + 2y\mathrm{Tan}^{-1}y - \log(1+y^2)$ の極小値をとる点 (x,y) としてとして正しいものを選べ.

選択肢　1. $\underline{(0,0)}$　2. $\underline{(1,0)}$　3. $\underline{(0,1)}$　4. $\underline{(1,1)}$

(4) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-4)$ $(x>0)$ の極大値をとる点 (x,y) としてとして正しいものを選べ.

選択肢　1. $\underline{(1,1)}$　2. $\underline{(1,-1)}$　3. $\underline{(2,0)}$　4. $\underline{(2,2)}$

$\boxed{2}$ (レポート課題)

(1) と (2) については 2 次までのマクローリン展開を求め，(3) と (4) については極値を求めよ．但し，マクローリン展開とは $(0,0)$ におけるテーラー展開の事を言う.

(1) $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}y}{\cos x}$　　(2) $f(x,y) = e^{x\sin y}$

(3) $f(x,y) = x^3 + xy - ax - by$ $(a,b \in \mathbb{R})$　　(4) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

【それ以外の問題】

3 次の関数を 2 次の項までマクローリン展開せよ. (剰余項は求めなくて良い.)
但し, マクローリン展開とは $(0,0)$ におけるテーラー展開の事を言う.

(1) $f(x,y)=e^{ax}\sin by\,(a,b\neq 0$ は定数$)$　(2) $f(x,y)=a^{x+2y}\,(a>0,a\neq 1)$

(3) $f(x,y)=\sqrt{1+e^{2xy}}$

4 次の関数 $f(x,y)$ が $(0,0)$ において極値をとるかどうかを判定せよ.

(1) $f(x,y)=\cos x+\cos y+2xy$　(2) $f(x,y)=x^2+y^4$

(3) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$　(4) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4$

(5) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$　(6) $f(x,y)=e^{1+x^2+y^2}$

5 次の関数 $f(x,y)$ に対して $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ となる (x,y) を全て求めよ.
さらに $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-4y$　(2) $f(x,y)=x^4-2x^3+x^2+y^2$

(3) $f(x,y)=xy(x+y-1)$　(4) $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)\ (x,y\in(0,\pi))$

(5) $f(x,y)=\sin x\sin y\,(x,y\in(0,\pi))$　(6) $f(x,y)=y\mathrm{Tan}^{-1}x$