数学演習第二 (第６回) 微積：偏微分 [2] (テーラーの定理, 極値) [解答例]

2021 年 11 月 24 日 実施

小テストの解答

$\boxed{1}$

(1) $f(x,y) = \frac{e^{-x}}{1+y^2}$ について $f_{xy} = -\frac{2ye^{-x}}{(1+y^2)^2}$ から $f_{xy}(0,0) = 0$ なので，２変数関数のテーラー展開の公式から求める係数は $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 = 0$．よって答えは 2.　　$\underline{0}$ である.
＜別解＞ $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \cdots$, $\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - \cdots$ から $\frac{e^{-x}}{1+y^2} = (1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \cdots)(1 - y^2 + y^4 - \cdots)$. これを展開しても xy^2 の項は現れないので, 答えは 2.　　$\underline{0}$ である.

(2) $f(x,y) = \log(x + \sqrt{1+2y})$ について $f_y = \frac{1}{\sqrt{1+2y}} \frac{1}{x+\sqrt{1+2y}}$ から $f_y(0,0) = 1$ なので，２変数関数のテーラー展開の公式から求める係数は 1．よって答えは 3.　　$\underline{1}$ である.
＜別解＞ マクローリン展開公式 $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \cdots$ に $t = 2y$ を代入して，$f(x,y) = \log(x + \sqrt{1+2y}) = \log(1+x+y-\frac{1}{2}y^2+\cdots)$．さらに, マクローリン展開 $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$ に $t = x + y - \frac{1}{2}y^2 + \cdots$ を代入して, $f(x,y) = (x + y - \frac{1}{2}y^2 + \cdots) - \frac{1}{2}(x + y - \frac{1}{2}y^2 + \cdots)^2 + \cdots$. これを展開すると y の係数は 1 なので, 答えは 3.　　$\underline{1}$ である.

(3) $f(x,y) = x^2e^y + 2y\mathrm{Tan}^{-1}y - \log(1+y^2)$. $\begin{cases} f_x = 2xe^y = 0 \\ f_y = x^2e^y + 2\mathrm{Tan}^{-1}y \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = (0,0)$ が極値をとる候補. $f_{xx} = 2e^y, f_{xy} = 2xe^y, f_{yy} = \frac{2}{1+y^2}$ より, $D(0,0) = 4 > 0$ で $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ なので $(x,y) = (0,0)$ で極小値をとる．よって答えは 1.　　$\underline{(0,0)}$.

(4) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-4)$. $\begin{cases} f_x = (y^2+3x^2-4)y = 0 \\ f_y = (x^2+3y^2-4)x = 0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y) = (1,\pm1), (2,0)$ が極値を与える候補. $f_{xx} = 6xy, f_{xy} = 3(x^2+y^2) - 4, f_{yy} = 6xy$ なので, $D(1,\pm1) = 32 > 0$ で $f_{xx}(1,\pm1) = \pm6 > 0$ から $(1,1)$ で極小値を, $(1,-1)$ で極大値をとる．一方, $D(2,0) = -64 < 0$ より極値を取らない．よって答えは 2.　　$\underline{(1,-1)}$.

レポートの解答

$\boxed{2}$

(1) $f(x,y) = \frac{\mathrm{Tan}^{-1}y}{\cos x}$ について, $g(x) = \frac{1}{\cos x}$, $h(y) = \mathrm{Tan}^{-1}y$ とすると $f(x,y) = g(x)h(y)$. $g(x)$ のマクローリン展開を求めると, $\cos t$ のマクローリン展開公式から,

$$g(x) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots)}$$

マクローリン展開公式 $\frac{1}{1-t} = 1 + t + \cdots$ に $t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots$ を代入して,

$$g(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right)^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots.$$

$h(y)$ の方は, $h'(y) = \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{1-(-y^2)} = 1 + (-y^2) + (-y^2)^2 + \cdots = 1 - y^2 + y^4 - \cdots$ の各辺を積分して,

$$h(y) = y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \cdots.$$

したがって, 求める答えは,

$$f(x,y) = g(x)h(y) = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots\right)\left(y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \cdots\right) = \underline{y + \cdots}.$$

ちなみに, f の２次までの偏導関数は $f_x = g'h$, $f_y = gh'$, $f_{xx} = g''h$, $f_{xy} = g'h'$, $f_{yy} = gh''$ であり, この中に現れる微分は次の通り:

$$g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x},\ g''(x) = \frac{2 - \cos^2 x}{\cos^3 x},\ h'(y) = \frac{1}{1+y^2},\ h''(y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

(2) $f(x,y)=e^{x\sin y}$. $\sin t$ のマクローリン展開公式から,

$$f(x,y)=e^{x\sin y}=e^{x\left(y-\frac{1}{6}y^3+\cdots\right)}=e^{xy-\cdots},$$

マクローリン展開 $e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+\cdots$ に $t=xy-\frac{1}{6}y^3+\cdots$ を代入して,

$$f(x,y)=1+\left(xy-\frac{1}{6}y^3+\cdots\right)+\left(xy-\frac{1}{6}y^3+\cdots\right)^2+\cdots=\underline{1+xy+\cdots}.$$

ちなみに, f の 2 次までの偏導関数は

$$f_x=\sin ye^{x\sin y},\ f_y=x\cos ye^{x\sin y},$$
$$f_{xx}=\sin^2 ye^{x\sin y},\ f_{xy}=(1+x\sin y)\cos ye^{x\sin y},\ f_{yy}=-x(\sin y-x\cos^2 y)e^{x\sin y}.$$

注意: 微分を計算して 2 変数関数のテーラー展開の公式に当てはめる解法もあるが, それだと計算が煩雑なため, 今回の解法のように既知のマクローリン展開を組み合わせる方法を推奨する.
(3) $f(x,y)=x^3+xy-ax-by$.

$$\begin{cases} f_x=3x^2+y-a=0 \\ f_y=x-b=0 \end{cases}$$ を解いて, $(x,y)=\left(b,a-3b^2\right)$ が極値を与える候補である.

$f_{xx}=6x, f_{xy}=1, f_{yy}=0$ であるから $D(b,a-3b^2)=-1<0$.

以上より, 求める答えは<u>極値なし</u>である.

(4) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

$$\begin{cases} f_x=3(x^2-y)=0\ldots ① \\ f_y=3(y^2-x)=0\ldots ② \end{cases}$$ ① − ② として $3(x+y+1)(x-y)=0$ から $x=y,-y-1$.

これを ② に代入して, $(x,y)=(0,0),(1,1)$ が極値を与える候補だとわかる.$f_{xx}=6x$, $f_{xy}=-3, f_{yy}=6y$ であるから $D(0,0)=-9<0,\ D(1,1)=27>0$ で $f_{xx}(1,1)=6>0$.

以上より, 求める答えは<u>$(1,1)$ で $f(x,y)$ は極小値 $f(1,1)=-1$ をとる</u>.

$\boxed{3}$ 次の２変数関数のマクローリン展開の公式を利用する.

$$f(x,y) =f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right\}$$
$$+ \frac{1}{3!}\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)x^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)x^2y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)y^3\right\} + \cdots \quad (*)$$

以下, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 等を f_x 等と書く.

(1) $f(x,y) = e^{ax}\sin by$ より,

$$f_x = ae^{ax}\sin by,\ f_y = be^{ax}\cos by,\ f_{xx} = a^2e^{ax}\cos by,\ f_{xy} = abe^{ax}\cos by,\ f_{yy} = -b^2e^{adx}\sin by,$$
$$f_{xxx} = a^3e^{ax}\sin by,\ f_{xxy} = a^2be^{ax}\cos by,\ f_{xyy} = -ab^2e^{ax\sin by}, f_{yyy} = -b^3e^{ax}\cos by$$

点 $(0,0)$ での値を $(*)$ に代入して

$$e^{ax}\sin by = by + \frac{1}{2}(2abxy) + \frac{1}{3!}\left(3a^2bx^2y - b^3y^3\right) + \cdots = by + abxy + \frac{1}{2}a^2bx^2y - \frac{1}{6}b^3y^3 + \cdots$$

< 別解 > $(*)$ を利用しても良いが１変数関数に対するマクローリン展開の公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots$$

を利用する. ２つの１変数関数 e^{ax} と $\sin by$ を３次の項まで展開して

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3!}a^3x^3 + \cdots, \sin by = by - \frac{1}{3!}b^3y^3 + \cdots$$

２変数多項式として４次以上の項を無視して展開し, 上べきの順に並べると

$$e^{ax}\sin by = \left(1 + ax + \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3!}a^3x^3 + \cdots\right)\left(by - \frac{1}{3!}b^3y^3 + \cdots\right) = by + abxy + \frac{1}{2}a^2bx^2y - \frac{1}{6}b^3y^3 + \cdots$$

(2) $(*)$ の式を利用しても良いが, $f(x,y) = a^{x+2y} = e^{(x+2y)\log a}$ であるから, 指数関数のマクローリン展開の式

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots$$

を用いる方が易しい. $t = (\log a)(x+2y)$ を代入すると

$$a^{x+2y} = 1 + (\log a)(x+2y) + \frac{(\log a)^2}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2) + \frac{(\log a)^3}{6}(x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3) + \cdots$$

を得る. 因みに f の三次までの偏導関数は次の通りである:

$$f_x = (\log a)a^{x+2y},\ f_y = 2(\log a)a^{x+2y},\ f_{xx} = (\log a)^2a^{x+2y},\ f_{xy} = 2(\log a)^2a^{x+2y},\ f_{yy} = 4(\log a)^2a^{x+2y},$$
$$f_{xxx} = (\log a)^3a^{x+2y},\ f_{xxy} = 2(\log a)^3a^{x+2y},\ f_{xyy} = 4(\log a)^3a^{x+2y},\ f_{yyy} = 8(\log a)^3a^{x+2y}$$

(3) $(*)$ の式を利用しても良いが, $g(t) = \sqrt{1+e^{2t}}$ とおけば $f(x,y) = g(xy)$ と書けることを利用する. e^x のマクローリン展開公式に $x = 2t$ を代入すれば $g(t)$ は以下で表せる:

$$g(t) = \sqrt{1+e^{2t}} = \sqrt{1 + (1 + 2t + 2t^2\cdots)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + (t + t^2 + \cdots)}.$$

マクローリン展開公式 $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots$ に $x = t + t^2 + \cdots$ を代入して,

$$g(t) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}(t + t^2\cdots) - \frac{1}{8}(t + t^2\cdots)^2 + \cdots\right) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{3\sqrt{2}}{8}t^2 + \cdots.$$

これに $t = xy$ を代入して, $f(x,y) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}xy + \cdots$ を得る (t について二次の項 x,y について四次になるため省略). ちなみに f の三次までの導関数は

$$f_x = g'(xy)y,\ f_y = g'(xy)x,\ f_{xx} = g''(xy)y^2,\ f_{xy} = h(xy),\ f_{yy} = g''(xy)x,$$
$$f_{xxx} = g'''(xy)y^3,\ f_{xxy} = h'(xy)y,\ f_{xyy} = g'(xy)x,\ f_{yyy} = g'(xy)x^3$$

で表される. 但し, $h(t) = g''(t)t + g'(t) = \{(1+2t) + (1+t)e^{2t}\}e^{2t}(1+e^{2t})^{-3/2}$ とした. また,

$$g'(t) = e^{2t}(1+e^{2t})^{-\frac{1}{2}},\ g''(t) = (2+e^{2t})e^{2t}(1+e^{2t})^{-\frac{3}{2}},$$
$$h'(t) = \{4(1+t) + 2(3+t)e^{2t} + (2+t)e^{4t}\}e^{2t}(1+e^{2t})^{-5/2}.$$

$\boxed{4}$

(1) $f(x,y)=\cos x+\cos y+2xy$.$f_x=-\sin x+2y, f_y=x-2y$ より，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. $f_{xx}=-\cos x, f_{xy}=2, f_{yy}=-\cos y$ より，$D(0,0)=-3<0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．
(2) $f(x,y)=x^2+y^4$.$(x,y)\neq(0,0)$ で $f(x,y)>0=f(0,0)$ となるので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値をとる．
(3) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.$x\neq 0$ の時，$f(x,x)=2x^4>0=f(0,0)$ であるが十分小さい y に対して $f(0,y)=y^2(y^2-2)<0$ なので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．
(4) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4=\left(x-y^2\right)^2$.$(x,y)\neq(0,0)$ が $x=y^2$ を満たす時 $f(x,y)=0=f(0,0)$ となるので，$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない．
(5) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$. $\begin{cases} f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0 \\ f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(0,0)$ が極値を与える候補． $f_{xx}=\frac{y^2+1}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}, f_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}, f_{yy}=\frac{x^2+1}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ より，$D(0,0)=1>0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=1$ を取る．
(6) $f(x,y)=e^{1+x^2+y^2}$. $\begin{cases} f_x=2xe^{1+x^2+y^2}=0 \\ f_y=2ye^{1+x^2+y^2}=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(0,0)$ が極値を与える候補. $f_{xx}=\left(4x^2+2\right)e^{1+x^2+y^2}, f_{xy}=4xye^{1+x^2+y^2}, f_{yy}=\left(4y^2+2\right)e^{1+x^2+y^2}$ より，$D(0,0)=4e^2>0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=e$ を取る．

$\boxed{5}$

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-4y$. $\begin{cases} f_x=2x-y-1=0 \\ f_y=-x+2y-4=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(2,3)$(この点が極値を与える候補)． $f_{xx}=2, f_{xy}=-1, f_{yy}=2$ より $D(2,3)=3>0$ よって，$f(x,y)$ は $(2,3)$ で極小値 $f(2,3)=-7$ をとる．
(2) $f(x,y)=x^4-2x^3+x^2+y^2$. $\begin{cases} f_x=4x^3-6x^2+2x=2x(x-1)(2x-1)=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$ より，$(x,y)=(0,0),(1,0),(1/2,0)$(この 3 点が極値を与える候補).$f_{xx}=12x^2-12x+2, f_{xy}=0, f_{yy}=2$ より，$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4(6x^2-6x+1)$.$D(0,0)=D(1,0)=4>0, f_{xx}(0,0)=f_{xx}(1,0)=2>0$ より，$f(x,y)$ は $(0,0),(1,0)$ で極小値 $f(0,0)=f(1,0)=0$ をとる. 一方，$D(1/2,0)=-2<0$ より $f(x,y)$ は $(1/2,0)$ では極値を取らない．
(3) $f(x,y)=xy(x+y-1)$. $\begin{cases} f_x=y(2x+y-1)=0 \\ f_y=x(x+2y-1)=0 \end{cases}$ より，$(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(1/3,1/3)$(この 4 点が極値を与える候補).$f_{xx}=2y, f_{xy}=2x+2y-1, f_{yy}=2x$ より，$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4xy-(2x+2y-1)^2$.$D(0,0)=D(1,0)=D(0,1)=-1<0$ より，$f(x,y)$ は $(0,0),(1,0),(0,1)$ で極値をとらない． 一方，$D(1/3,1/3)=1/3>0, f_{xx}(1/3,1/3)=2/3>0$ より，$f(x,y)$ は $(1/3,1/3)$ で極小値 $f(1/3,1/3)=16/27$ をとる．
(4) $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$. $\begin{cases} f_x=\cos x-\cos(x+y)=0\ldots ① \\ f_y=\cos y-\cos(x+y)=0\ldots ② \end{cases}$ で ① − ② から $\cos x=\cos y$, $x,y\in(0,\pi)$ から $x=y$, ①に代入して $(x,y)=\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)$ を得る (この点が極値を与える候補)． $f_{xx}=-\sin x+\sin(x+y), f_{xy}=\sin(x+y), f_{yy}=-\sin y+\sin(x+y)$ なので，$D\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{9}{4}>0, f_{xx}\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}<0$ より $f(x,y)$ は $\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)$ で極大値 $f\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる．
(5) $f(x,y)=\sin x\sin y$. $\begin{cases} f_x=\cos x\sin y=0 \\ f_y=\sin x\cos y=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$(この点が極値を与える候補)． $f_{xx}=-\sin x\sin y, f_{xy}=\cos x\cos y, f_{yy}=-\sin x\sin y$ より，$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=\sin^2 x\sin^2 y-\cos^2 x\cos^2 y$.$D(\pi/2,\pi/2)=1>0, f_{xx}(\pi/2,\pi/2)=-1<0$ より，$f(x,y)$ は $(\pi/2,\pi/2)$ で極大値 $f(\pi/2,\pi/2)=1$ をとる．
(6) $f(x,y)=y\mathrm{Tan}^{-1}x$. $\begin{cases} f_x=\frac{y}{x^2+1}=0 \\ f_y=\mathrm{Tan}^{-1}x=0 \end{cases}$ を解いて，$(x,y)=(0,0)$(この点が極値を与える候補)． $f_{xx}=-\frac{2xy}{(x^2+1)^2}, f_{xy}=\frac{1}{x^2+1}, f_{yy}=0$ より，$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=-\frac{1}{(x^2+1)^2}$.$D(0,0)=-1<0$ より，$f(x,y)$ は極値をとらない．