数学演習第二（演習第７回）

線形：座標，行列の零空間・行空間・列空間

2021 年 12 月 1 日

- $\boxed{\text{小テスト}}$ の問題は $\boxed{1}$ の 4 問です. $\boxed{\text{レポート課題}}$ は $\boxed{2}$ の 4 問です.
- それ以外の問題は自習用問題です (こちらも是非解いて下さい).
- 要点もよく読くこと．レポート課題の答案には**答えだけでなく途中の計算も書いて下さい**.

【要点】

〈基底によるベクトルの座標〉 (線形教科書 p. 119–120)

$\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r)$ がベクトル空間 V の１つの基底であれば, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は $\boldsymbol{b}_1$, $\ldots, \boldsymbol{b}_r$ の１次結合で一通りに表される.

そこで，$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ と書くとき，$\boldsymbol{v}$ と $\mathcal{B}$ から一通りに定まる列ベクトル $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する**座標**といい，$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ で表す．V が数ベクトル空間（の部分空間）の場合，座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるには，非同次連立１次方程式 $[\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}$ を解けばよい．つまり，実際の計算では, この拡大係数行列 $[\boldsymbol{b}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{b}_r \ \boldsymbol{v}]$ を簡約化する.

例えば，$\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ に対して，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$ の基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ は $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2$ より $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ となる.

〈行列の零空間・行空間・列空間〉 (線形教科書 p. 107,130,132)

$m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m \end{bmatrix} = [\boldsymbol{c}_1 \cdots \boldsymbol{c}_n]$ に対して,

零空間 $N(A)$　同次連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体が作る $\mathbb{R}^n$ の部分空間.

行空間 $R(A)$　n 次行ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_m$ で生成される $\mathbb{R}_n$ の部分空間.

（ただし，$\mathbb{R}_n$ は，n 次行ベクトル全体が作るベクトル空間を表す.）

列空間 $C(A)$　m 次列ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間.

〈共通部分と和空間に関する次元公式〉 (線形教科書 p. 134)

W_1, W_2 を V の部分空間とするとき，次の等式が成り立つ.

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

【小テスト：オンライン受験】

1 (1) 次の４つのベクトルの組のうち，１次従属であるものを<u>すべて</u>選べ.

（ア）

$$\begin{bmatrix}1\\-3\\5\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5\\2\\-10\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}3\\4\\-12\end{bmatrix}$$

（イ）

$$\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}4\\3\\7\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

（ウ）

$$\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}7\\5\\6\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}9\\6\\10\end{bmatrix}$$

（エ）

$$\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-12\\-6\\-9\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}5\\3\\4\end{bmatrix}$$

(2) (1) の **（ア）〜（エ）** のうち，$\mathbb{R}^3$ の基底であるものを<u>すべて</u>選べ.

(3) 3×4 行列

$$A=\begin{bmatrix}2&3&-4&9\\4&7&-6&21\\3&5&-5&15\end{bmatrix}$$

の零空間 $N(A)$ の次元を次の中から選べ.

（ア） 1　　**（イ）** 2　　**（ウ）** 3　　**（エ）** 4

(4) (3) の A の列空間 $C(A)$ の次元を次の中から選べ.

（ア） 1　　**（イ）** 2　　**（ウ）** 3　　**（エ）** 4

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ (1) $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left(\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}\right)$ に関するベクトル $\begin{bmatrix}24\\15\end{bmatrix}$ の座標を求めよ.

$\mathbb{R}^3$ の2つの部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x+2y+z=0 \right\},$$

$$W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\2\\-3\end{bmatrix} \right\rangle$$

について，以下の問いにそれぞれ答えよ.

(2) W_1 の次元と基底の1組を求めよ.

(3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底の1組を求めよ.

(4) $W_1 + W_2$ の次元と基底の1組を求めよ.

【それ以外の自習用問題】

3 $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\mathcal{E}=\left(\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ と，さらに次の 2 つの基底を考える．

$$\mathcal{A}=\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right),\quad \mathcal{B}=\left(\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}\right)$$

(1) $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}}$，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ．

(2) $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{v}$ の基底 $\mathcal{E}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{E}}$ および基底 $\mathcal{B}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ．

4 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V=\left\langle \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ を考えると，$\mathcal{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ は V の基底である．$\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}4\\-5\\-8\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}-7\\7\\13\end{bmatrix}$ はどれも V に含まれることを示し，基底 $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$，$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}$ をそれぞれ求めよ．

5 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1,W_2,W_3,W_4 を以下の通りに定める．

$$W_1=\left\langle \boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}\right\rangle,\quad W_2=\left\langle \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}1\\-5\\-1\\-5\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\7\end{bmatrix}\right\rangle,$$

$$W_3=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \begin{array}{rcrcrcrcl}2x_1&+&3x_2&+&3x_3&-&3x_4&=&0\\-x_1&-&2x_2&-&x_3&+&x_4&=&0\end{array}\right\},$$

$$W_4=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ 2x_1+x_2-4x_3+x_4=0\right\}$$

(1) W_2,W_3 の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(2) $W_1\cap W_2$，W_1+W_2 の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(3) $W_1\cap W_3$，W_1+W_3 の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(4) $W_3\cap W_4$，W_3+W_4 の次元と基底をそれぞれ求めよ．

6 行列 $M=\begin{bmatrix}3&-5&-1&-3&-9\\1&0&3&1&2\\2&-1&4&1&1\\1&-1&1&-1&-1\end{bmatrix}$ とする．

M および ${}^tM$ の零空間，行空間，列空間の次元と基底をそれぞれ求めよ．