

数学演習第二 (演習第7回) 【解答例】

線形：座標，行列の零空間・行空間・列空間 2021年12月1日

【小テストの解答例】

- 1 (1) 列ベクトルを結合させた行列を簡約化すればよい。或いは行列式の値を計算してもよい。

$$\begin{aligned} \text{(ア)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & -10 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 17 & 13 \\ 0 & -35 & -27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 17 & 13 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 17 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{(イ)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ウ)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(エ)} \quad \begin{bmatrix} 4 & -12 & 5 \\ 2 & -6 & 3 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって答は (イ), (エ).

- (2) (1) の計算と線形代数学の教科書の命題 17.4 (というよりも定理 9.1) から、特に3つの3次列ベクトルが1次独立ならば、それらは \mathbb{R}^3 の基底をなす。

よって答は (ア), (ウ).

$$\text{(3)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 9 \\ 4 & 7 & -6 & 21 \\ 3 & 5 & -5 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 9 \\ 4 & 7 & -6 & 21 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{より, } N(A) = \left(\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

よって答は (イ).

- (4) (3) の計算と線形代数学の教科書の命題 19.9 から、 $\dim C(A) = \text{rank } A = 2$.

よって答は (イ).

【レポート課題の解答例】

2 (1) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 24 \\ 2 & 7 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -10 & -6 \\ 2 & 7 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -10 & -6 \\ 0 & 27 & 27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -10 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 よって求める座標は $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ は $z = -2x - 2y$ をみたくから, $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$. また, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ は1次独立.
 よって $\dim W_1 = 2$ で, 求める W_1 の1組の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = c_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. つ
 まり $-3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるので $-3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ が成立する.
 また $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
 よって $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ で, 求める $W_1 \cap W_2$ の1組の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

(4) (3) より $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ かつ $\dim W_1 = 2, \dim W_2 = 2$ であるので
 次元公式より, $\dim(W_1 + W_2) = 3$. これより $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ であるので求める基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

【それ以外の自習用問題の解答例】

3 (1) $\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$ だから, $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{A}}$ を求めるために, $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1$ を

解く. $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 | \mathbf{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array} \right]$

より, $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}(3\mathbf{a}_1 - 7\mathbf{a}_2 + 9\mathbf{a}_3)$. よって, $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を掛けてもよい.

(2) 条件から, $\mathbf{v} = p\mathbf{a}_1 + q\mathbf{a}_2 + r\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} q+r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix}$. $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるために, $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix}$ を解

く. $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 | \mathbf{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 3 & 3 & 2 & -p+r \\ 5 & 4 & 2 & p-q \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 0 & -3 & -7 & -p-3q-2r \\ 0 & -6 & -13 & p-6q-5r \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 0 & 3 & 7 & p+3q+2r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array} \right] \rightarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -9p+q+4r \\ 0 & 3 & 0 & -20p+3q+9r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{3}p-q-2r \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{20}{3}p+q+3r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array} \right]$. よって, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3}p-q-2r \\ -\frac{20}{3}p+q+3r \\ 3p-r \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} =$

$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -4 & 13 & -7 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ を掛けてもよい.

4 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_i$ ($i = 1, 2$) を解く. $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 | \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 4 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & -8 & 13 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -7 & 14 & -21 \\ 0 & 9 & -18 & 27 \end{array} \right] \rightarrow$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$. ここから, $\mathbf{b}_1 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ と $\mathbf{b}_2 = -5\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2$ がわかる. 従って, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の一次

結合で表せるので W に属する. さらに, $[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. $[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

5 (1) $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\dim W_2 = 2$ で, 基底の一例は

$(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ より, $\dim W_3 = 2$ で, 基底の一例は

$\left(\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は一次独立だから, $\dim W_1 = 2$. さらに,

$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -7 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$

より, $\dim(W_1 + W_2) = \text{rank}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] = 3$ であり, 基底の一例は, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)$. 共通部分と和の次元公式から, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$. 上の簡約行列から, $-3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ という非自明な一次関係式が読み取れる.

これは, $3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ を意味する. 左辺は W_1 に, 中辺は W_2 に属するから, この元は共通部分 $W_1 \cap W_2$

に属す. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ だから, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$ が $W_1 \cap W_2$ の基底. [注意]: $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_1 - c_2 \\ 2c_1 \end{bmatrix} \in W_2 = \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$

となる c_1, c_2 の条件を求める方法でもできる.

(3) $\dim W_1 = \dim W_3 = 2$.

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より, $\dim(W_1 + W_3) = \text{rank}[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] = 3$ であり, 基底の一例は, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_1)$. 共通部分と和の次元公式から, $\dim(W_1 \cap W_3) = 2 + 2 - 3 = 1$. 上の簡約行列から, $-2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 3\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ という非自明な一次関係式が読み取れる.

これは, $2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = 3\mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ を意味する. 左辺は W_1 に, 中辺は W_3 に属するから, この元は共通部分

$W_1 \cap W_3$ に属す. $\dim(W_1 \cap W_3) = 1$ だから, $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$ が $W_1 \cap W_3$ の基底. [注意]: $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_1 - c_2 \\ 2c_1 \end{bmatrix}$

を W_3 の条件にある連立一次方程式に代入して, c_1, c_2 の満たす条件を求める方法でもできる.

(4) $\dim W_3 = 2, \dim W_4 = 3$. さらに, $W_3 \cap W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$ だけ

ら, $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ より,

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ で, 基底の一例は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$. $\dim W_3 = 2, \dim W_4 = 3$ より, 共通部分と和に関する次元公式か

ら, $\dim(W_3 + W_4) = 2 + 3 - 1 = 4$. $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ だから, $W_3 + W_4 = \mathbb{R}^4$. [注意]: W_4 の基底を求めて (2), (3) と同じ方法で考えてもよい.

6

行列 A の零空間, 行空間, 列空間の基底は A の簡約行列をもとに考える. 零空間 $N(A)$ の次元は A の列数 $-\text{rank } A$ であり, 基底は, 同次連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解を選べばよい. $\dim C(A) = \text{rank } A$ であり, 列空間の基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列 A の列を取ればよい. $\dim R(A) = \text{rank } A$ であり, 行基本変形で行空間は変わらないので, 簡約行列の 1 行目から $\text{rank } A$ 行目までを取ればよい.

$$\text{まず } M \text{ について考える. } M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\dim N(M) = 2$ で基底の一例は, $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\dim C(M) = \text{rank } M = 3$

で, 主成分が 1, 2, 4 列にあることから, 基底の一例は M の 1, 2, 4 列 $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$. また,

$\dim R(M) = \text{rank } M = 3$ で, 基底の一例は, $([1, 0, 3, 0, 2], [0, 1, 2, 0, 3], [0, 0, 0, 1, 0])$.

$$\text{次に } {}^tM \text{ について考える. } {}^tM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -9 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 10 & 14 & 4 \\ 0 & -15 & -21 & -6 \\ 0 & -8 & -11 & -4 \\ 0 & -25 & -35 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\dim N({}^tM) = 1$ で基底の一例は, $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\dim C({}^tM) = \text{rank } {}^tM = 3$ で, 主成分が 1, 2, 3

列にあることから、基底の一例は tM の 1, 2, 3 列 $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. また, $\dim R({}^tM) = \text{rank } {}^tM = 3$ で,

基底の一例は, $([1, 0, 0, 1], [0, 1, 0, 6], [0, 0, 1, -4])$.

[注意]: $R({}^tM)$ の基底は $C(M)$ の基底の転置, $C({}^tM)$ の基底は $R(M)$ の基底の転置を取っても可.