数学演習第二（演習第 8 回）

微積：偏微分 [3]（陰関数・ラグランジュの未定乗数法）

2021 年 12 月 15 日 実施

- 小テストの問題は $\boxed{1}$ の 4 問です．レポート課題は $\boxed{2}$ の 4 問です．
- それ以外の問題は自習用問題です（こちらも是非解いてください）．
- レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いてください．

【要点】

- 陰関数（微積教科書 **p. 100**）
  - x，y に $f(x,y)=0$ という関係があるとき，局所的には y は x の関数と考えられることが多い．x の開区間で定義された関数 $y=\varphi(x)$ が

$$f(x,\varphi(x))=0$$

    を満たすとき，$y=\varphi(x)$ を $f(x,y)=0$ で定義された陰関数という．
  - $f(x,y)=x^2+y^2-1$ とする．$f(x,y)=0$ は原点中心かつ半径 1 の円を表す．このとき，$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$，$\psi(x)=-\sqrt{1-x^2}$ は

$$f(x,\varphi(x))=0,\quad f(x,\psi(x))=0$$

    を満たす．すなわち，$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$ は $f(x,y)=0$ で定義された陰関数である．

- 陰関数定理（微積教科書 **p. 100**）
  - $f(x,y)$ は C^1 級かつ点 (a,b) で $f(a,b)=0$，$f_y(a,b)\neq 0$ を満たすとする．このとき，a を含む開区間で定義された $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ で，$\varphi(a)=b$ となるものが存在する．さらに，$f(x,\varphi(x))=0$ が成り立っているので，この両辺を x で微分して，

$$f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

    を得る．ただし，$x=a$ の近傍で $f_y(x,\varphi(x))\neq 0$ に注意せよ．
  - $f(x,y)$ が C^n 級ならば上記の $\varphi(x)$ は C^n 級となる．特に，$n=2$ のときには，上記の関係式 $f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$ の両辺を x で微分すれば $\varphi''(x)$ を求めることができる．

- ラグランジュの未定乗数法（微積教科書 **p. 104**）
  - $g(x,y)=0$ の条件の下で，$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をもつとする．

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

    とおき，$g_x(a,b)\neq 0$ または $g_y(a,b)\neq 0$ とする．このとき，

$$F_x(a,b,\alpha)=0,\quad F_y(a,b,\alpha)=0,\quad F_\lambda(a,b,\alpha)=0$$

    となるような α が存在する．
  - 上記の λ をラグランジュ乗数（Lagrange multiplier）という．

【小テスト：オンライン受験】

$\boxed{1}$ $f(x,y)=(x^2+y^2-2)(x^2-y^2-3)$ とする．

(1) $f(x,y)=0$ で定義される陰関数 $y=\varphi(x)$ のうち，点 $(1,-1)$ を通るものをつぎの（ア）から（エ）の中から選べ．

（ア） $-\sqrt[4]{2-x^2}$ （イ） $-\sqrt{2-x^2}$ （ウ） $-x$ （エ） $-x^2$

(2) 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点 $(1,-1)$ における接線の方程式をつぎの（ア）から（エ）の中から選べ．

（ア） $x-2$ （イ） $-x$ （ウ） $-2x+1$ （エ） $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

(3) $f(x,y)=0$ で定義される陰関数 $y=\varphi(x)$ のうち，点 $(-2,1)$ を通るものをつぎの（ア）から（エ）の中から選べ．

（ア） $\sqrt[4]{5-x^2}$ （イ） $\sqrt{5-x^2}$ （ウ） $2x+5$ （エ） $\sqrt{x^2-3}$

(4) 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点 $(-2,1)$ における接線の方程式をつぎの（ア）から（エ）の中から選べ．

（ア） $-\dfrac{1}{2}x$ （イ） $x+3$ （ウ） $2x+5$ （エ） $-2x-3$

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ $f(x,y)=x+y$，$g(x,y)=x^2-xy+y^2-1$ とする．条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ の極値を調べる．

(1) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とする．

$$F_x(a,b,\alpha)=0,\quad F_y(a,b,\alpha)=0,\quad F_\lambda(a,b,\alpha)=0$$

をみたす (a,b,α) をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた点 (a,b) の近傍において，$g(x,y)=0$ で定義される陰関数を $y=\varphi(x)$ とする．さらに，$h(x)=f(x,\varphi(x))$ とする．(1) で求めた各 a に対して $h'(a)$ と $h''(a)$ の値を求めよ．

(3) 条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ の極大値をすべて求めよ．「点 (p,q) において極大値 r を取る」という形式で答えること．

(4) 条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ の極小値をすべて求めよ．「点 (p,q) において極小値 r を取る」という形式で答えること．

【自習用問題】

$\boxed{3}$（演習書：問題 5.2.7）以下の 2 変数関数 $f(x,y)$ と $f(x,y)=0$ 上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ について考える．

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 1 \quad (-\infty < x, y < \infty), && (a,b) = (0,1);\\
&f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 \quad (x \geq 0, y \geq 0), && (a,b) = (1,1);\\
&f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0), && (a,b) = (1,0);\\
&f(x,y) = xe^y - y + 1 \quad (-\infty < x, y < \infty), && (a,b) = (-1,0).
\end{aligned}
$$

各 $f(x,y)$ に対して，$f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ に関する以下の設問に答えよ．

(1) $\varphi'(x)$，$\varphi''(x)$ を x，y を用いて表せ．

(2) 曲線 $f(x,y)=0$ 上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-2\varphi(a)-\varphi(2a-x)}{(x-a)^2}$ を求めよ．

$\boxed{4}$（演習書：5.2.13）ラグランジュの未定乗数法を用いて，$g(x,y)=0$ の下での $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(1) $g(x,y) = x^2+y^2-1$，$f(x,y) = xy$.

(2) $g(x,y) = x^4+y^4-1$，$f(x,y) = x+8y$.