数学演習第二（演習第 8 回）

微積：偏微分 [3]（陰関数・ラグランジュの未定乗数法）の解答例

2021 年 12 月 15 日 実施分

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$ $f(x,y)=0$ を解くとつぎの 4 つの陰関数を得る．

$$\varphi_1(x)=\sqrt{2-x^2},\quad \varphi_2(x)=-\sqrt{2-x^2},\quad \varphi_3(x)=\sqrt{x^2-3},\quad \varphi_4(x)=-\sqrt{x^2-3}\quad\cdots\quad(*)$$

(1) $(*)$ より答えは（イ）．

(2) (1) より $y=-\sqrt{2-x^2}$ の $x=1$ における接線の方程式を求めればよい．よって，答えは（ア）．

(3) $(*)$ より答えは（エ）．

(4) (3) より $y=\sqrt{x^2-3}$ の $x=-2$ における接線の方程式を求めればよい．よって，答えは（エ）．

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$

(1) $F(x,y,\lambda)=x+y-\lambda(x^2-xy+y^2-1)$ となる．これより，

$$F_x=1-\lambda(2x-y),\quad F_y=1-\lambda(-x+2y),\quad F_\lambda=-(x^2-xy+y^2-1)$$

となる．$F_x=0$ かつ $F_y=0$ を (x,y) について解くと，$(x,y)=(\lambda^{-1},\lambda^{-1})$ $(\lambda\neq 0)$ となる．これを $F_\lambda=0 \Leftrightarrow x^2-xy+y^2-1=0$ に代入して解くと，$\lambda=\pm 1$ となる．よって，$(a,b,\alpha)=\boxed{(\pm 1,\pm 1,\pm 1)}$．

(2) $g(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分して

$$g_x(x,\varphi(x))+g_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0\quad\cdots\quad(オ)$$

を得る．さらに，この式の両辺を x で微分して

$$g_{xx}(x,\varphi(x))+2g_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+g_{yy}(x,\varphi(x))\{\varphi'(x)\}^2+g_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)=0\quad\cdots\quad(カ)$$

を得る．また，

$$g_x(x,y)=2x-y,\quad g_{xx}(x,y)=2,\quad g_{xy}(x,y)=-1,\quad g_y(x,y)=-x+2y,\quad g_{yy}(x,y)=2.$$

まず，$(a,b)=(1,1)$ の場合を考える．$\varphi(1)=1$ に注意して，（オ）に $a=1$ を代入すると

$$g_x(1,1)+g_y(1,1)\varphi'(1)=0\quad\Leftrightarrow\quad\varphi'(1)=-1$$

を得る．さらに，（カ）に $a=1$ を代入して計算すると $\varphi''(1)=-6$ を得る．$h(x)=f(x,\varphi(x))=x+\varphi(x)$ なので，$h'(1)=1+\varphi'(1)=\boxed{0}$，$h''(1)=\varphi''(1)=\boxed{-6}$．
次に，$(a,b)=(-1,-1)$ の場合を考える．$\varphi(-1)=-1$ に注意して，（オ）に $a=-1$ を代入すると

$$g_x(-1,-1)+g_y(-1,-1)\varphi'(-1)=0\quad\Leftrightarrow\quad\varphi'(-1)=-1$$

を得る．さらに，（カ）に $a=-1$ を代入して計算すると $\varphi''(-1)=6$ を得る．よって，$h'(-1)=1+\varphi'(-1)=\boxed{0}$，$h''(-1)=\varphi''(-1)=\boxed{6}$．

(3) 極値を取る点 (x,y) の候補は $(\pm1,\pm1)$．(2) より $h'(1)=0$ かつ $h''(1)<0$ なので，条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ は $\boxed{\text{点 } (1,1) \text{ において極大値 } 2 \text{ を取る}}$．

(4) (2) より $h'(-1)=0$ かつ $h''(-1)>0$ が成り立つ．よって，条件 $g(x,y)=0$ の下で $f(x,y)$ は $\boxed{\text{点 } (-1,-1) \text{ において極小値 } -2 \text{ を取る}}$．

【自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$

(1) $\underline{f(x,y)=2x^2-2xy+y^2-1 \text{ の場合}}$　$f(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分して，

$$f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad \cdots \quad (\text{キ})$$

を得る．$f_x=4x-2y$，$f_y=-2x+2y$ なので，（キ）より $4x-2y+(-2x+2y)\varphi'(x)=0$ を得る．これを整理して，$\varphi'(x)=\boxed{\dfrac{2x-y}{x-y}}$．さらに，（キ）の両辺を x で微分して，

$$f_{xx}(x,\varphi(x))+2f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)+f_{yy}(x,\varphi(x))\{\varphi'(x)\}^2+f_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)=0 \quad \cdots \quad (\text{ク})$$

を得る．$f_{xx}=4$, $f_{xy}=-2$, $f_{yy}=2$ なので,（ク）より $4-4\varphi'(x)+2(\varphi'(x))^2+(-2x+2y)\varphi''(x)=0$.
これを整理すると，

$$\varphi''(x)=\frac{2-2\varphi'(x)+(\varphi'(x))^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2\{2-2\varphi'(x)+(\varphi'(x))^2\}}{(x-y)^3}$$

となる．$(x-y)\varphi'(x)=2x-y$ に注意して，

$$\begin{aligned}(x-y)^2\{2-2\varphi'(x)+(\varphi'(x))^2\}&=2(x-y)^2-2(x-y)(2x-y)+(2x-y)^2\\&=2x^2-2xy+y^2 \underset{(f(x,y)=0)}{=} 1\end{aligned}$$

を得る．よって，$\varphi''(x)=\boxed{\dfrac{1}{(x-y)^3}}$.

$\underline{f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-2 \text{ の場合}}$　$f_x=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_y=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ なので,（キ）より $\varphi'(x)=\boxed{-\sqrt{\dfrac{y}{x}}}$．さらに，$f_{xx}=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=-\dfrac{1}{4y\sqrt{y}}$ なので,（ク）より $-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4y\sqrt{y}}(\varphi'(x))^2+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\varphi''(x)=0$.
これに $\varphi'(x)$ を代入して整理すると $\varphi''(x)=\boxed{\dfrac{1}{2x}\left(1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)}$.

【補足 1】 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ より $y=(2-\sqrt{x})^2$ と陰関数が具体的に表される．実はこれを用いた方が簡単になる．

【補足 2】 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ を原点回りに 45° 回転させると, この曲線が放物線であることがわかる (確認せよ).

$\underline{f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \text{ の場合}}$　$f_x=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$，$f_y=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$ なので，（キ）より

$\varphi'(x) = \boxed{\dfrac{x+y}{x-y}}$. このとき，$\varphi'(x) = \dfrac{x-y+2y}{x-y} = 1 + \dfrac{2y}{x-y}$ なので，この式の両辺を x で微分して，

$$\varphi''(x) = \frac{2y'}{x-y} - \frac{2y(1-y')}{(x-y)^2} = \frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2} \underset{(y'=\varphi'(x)\text{ を代入})}{=} \boxed{\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}}.$$

【補足】上の結果より $f(x,y)=0$ は同次形の微分方程式 $y' = \dfrac{1+(y/x)}{1-(y/x)}$ の特殊解であることがわかる．また，曲線 $f(x,y)=0$ は原点に関して対称であり，極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を使うと $x>0$ $(-\pi/2<\theta<\pi/2)$ においては $r = e^\theta$ (あるいは $\theta = \log r$) と簡潔に表示される．なお，極座標表示で $r = ae^{b\theta}$ $(a>0, b\neq 0$ は定数) と表される曲線は対数螺線 (あるいはベルヌーイの螺線) と呼ばれる．

<u>$f(x,y) = xe^y - y + 1$ の場合</u>　$f_x = e^y$，$f_y = xe^y - 1$ なので，(キ) より $\varphi'(x) = \dfrac{e^y}{1-xe^y} \underset{(f(x,y)=0)}{=} \boxed{\dfrac{e^y}{2-y}}$. この両辺を x で微分して，

$$\varphi''(x) = \frac{y'e^y}{2-y} + \frac{y'e^y}{(2-y)^2} = \frac{(3-y)y'e^y}{(2-y)^2} \underset{(y'=\varphi'(x)\text{ を代入})}{=} \boxed{\frac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}}.$$

(2) $f(x,y)=0$ 上の点 $\mathrm{P}(a,b)$ における接線の方程式は，$\varphi(a)=b$ をみたすような ($f(x,y)=0$ で定まる) 陰関数 $y=\varphi(x)$ を用いて，$y = \varphi'(a)(x-a)+b$ と書ける．

- $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 1$ の場合．(1) より $\varphi'(0) = \left.\dfrac{2x-y}{x-y}\right|_{(x,y)=(0,1)} = 1$ となる．よって，求める接線の方程式は $\boxed{y = x+1}$.
- $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2$ の場合．(1) より $\varphi'(1) = \left.-\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right|_{(x,y)=(1,1)} = -1$ となる．よって，求める接線の方程式は $\boxed{y = -x+2}$.
- $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} - \mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の場合．(1) より $\varphi'(1) = \left.\dfrac{x+y}{x-y}\right|_{(x,y)=(1,0)} = 1$ となる．よって，求める接線の方程式は $\boxed{y = x-1}$.
- $f(x,y) = xe^y - y + 1$ の場合．(1) より $\varphi'(-1) = \left.\dfrac{e^y}{2-y}\right|_{(x,y)=(-1,0)} = \dfrac{1}{2}$ となる．よって，求める接線の方程式は $\boxed{y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}}$.

(3)

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x) - 2\varphi(a) + \varphi(2a-x)}{(x-a)^2} \underset{(\text{ロピタル})}{=} \lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x) - \varphi'(2a-x)}{2(x-a)}$$
$$\underset{(\text{ロピタル})}{=} \lim_{x\to a}\frac{\varphi''(x) + \varphi''(2a-x)}{2} = \varphi''(a)$$

なので，$\varphi''(a)$ を求めればよい．

- $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 1$ の場合．(1) より $\varphi''(0) = \left.\dfrac{1}{(x-y)^3}\right|_{(x,y)=(0,1)} = \boxed{-1}$.
- $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2$ の場合．(1) より $\varphi''(1) = \left.\dfrac{1}{2x}\left(1 + \sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)\right|_{(x,y)=(1,1)} = \boxed{1}$.

– $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の場合．(1) より $\varphi''(1)=\left.\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}\right|_{(x,y)=(1,0)}=\boxed{2}$.

– $f(x,y)=xe^y-y+1$ の場合．(1) より $\varphi''(1)=\left.\dfrac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}\right|_{(x,y)=(-1,0)}=\boxed{\dfrac{3}{8}}$.

$\boxed{4}$

(1) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$ とおく．このとき，$F_x=y-2\lambda x$，$F_y=x-2\lambda y$，$F_\lambda=-(x^2+y^2-1)$ となる．$F_x=F_y=F_\lambda=0$ を解いて，

$$(x,y,\lambda)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}),\ (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}},+\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$$

を得る．$g(x,y)=0$ で定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とし，$h(x)=f(x,\varphi(x))=x\varphi(x)$ とおく．$g(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分して，$g_x=2x$，$g_y=2y$ を用いると，

$$g_x(x,\varphi(x))+g_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad \underset{(y=\varphi(x))}{\Rightarrow} \quad x+y\varphi'(x)=0$$

となる．これより，$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ において $\varphi'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=-1$ となり，$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ において $\varphi'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=1$ となる．さらに，$x+y\varphi'(x)=0 \underset{(y=\varphi(x))}{\Leftrightarrow} x+\varphi(x)\varphi'(x)=0$ の両辺を x で微分すると，$1+(\varphi'(x))^2+y\varphi''(x)=0$ となる．これより，$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ において $\varphi''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\mp2\sqrt{2}$ となり，$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ において $\varphi'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\pm2\sqrt{2}$ となる．いま，$h'(x)=\varphi(x)+x\varphi'(x)$, $h''(x)=2\varphi'(x)+x\varphi''(x)$ なので，$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ において $h'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\varphi(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ となり，$h''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=2\varphi'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=-4$ となる．同様に，$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ において $h'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=0$ となり，$h''(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=4$ となる．以上より，$\boxed{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})\text{ において極大値 }\frac{1}{2}\text{ を取り}}$, $\boxed{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})\text{ において極小値 }-\frac{1}{2}\text{ を取る}}$.

(2) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x+8y-\lambda(x^4+y^4-1)$ とおく．このとき，$F_x=1-4\lambda x^3$，$F_y=8-4\lambda y^3$, $F_\lambda=-(x^4+y^4-1)$ となる．$F_x=F_y=F_\lambda=0$ を解いて，$(x,y,\lambda)=(\frac{1}{\sqrt[4]{17}},\frac{2}{\sqrt[4]{17}},\frac{(\sqrt[4]{17})^3}{4})$, $(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}},-\frac{2}{\sqrt[4]{17}},-\frac{(\sqrt[4]{17})^3}{4})$ を得る．あとは (1) と同様の考察を行う．$g(x,y)=0$ で定まる陰関数を $y=\varphi(x)$ とし，$h(x)=f(x,\varphi(x))=x+8\varphi(x)$ とおく．すると，$(x,y)=(\frac{1}{\sqrt[4]{17}},\frac{2}{\sqrt[4]{17}})$ において，$\varphi'(\frac{1}{\sqrt[4]{17}})=-\frac{1}{8}$，$\varphi''(\frac{1}{\sqrt[4]{17}})=-\frac{51\sqrt[4]{17}}{128}$ となる．また，$(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}},-\frac{2}{\sqrt[4]{17}})$ において，$\varphi'(\frac{1}{\sqrt[4]{17}})=-\frac{1}{8}$，$\varphi''(\frac{1}{\sqrt[4]{17}})=\frac{51\sqrt[4]{17}}{128}$ となる．$h'(x)=1+8\varphi'(x)$，$h''(x)=8\varphi''(x)$ に注意すると，$h'(\frac{1}{\sqrt[4]{17}})=0$ かつ $h''(\frac{1}{\sqrt[4]{17}})<0$ が成り立ち，さらに，$h'(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}})=0$ かつ $h''(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}})>0$ が成り立つ．以上より，$\boxed{(x,y)=(\frac{1}{\sqrt[4]{17}},\frac{2}{\sqrt[4]{17}})\text{ で極大値 }\frac{17}{\sqrt[4]{17}}}$, $\boxed{(x,y)=(-\frac{1}{\sqrt[4]{17}},-\frac{2}{\sqrt[4]{17}})\text{ で極小値 }-\frac{17}{\sqrt[4]{17}}}$ を取る．