数学演習第二（演習第 9 回）

線形：線形写像，核と像

2021 年 12 月 22 日 実施

- 小テストの問題は $\boxed{1}$ の 4 問です．レポート課題は $\boxed{2}$ の 4 問です．
- それ以外の問題は自習用問題です（こちらも是非解いてください）．
- レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いてください．

【要点】

- **線形写像（線形教科書 pp. 142–144）**
  - V, W をベクトル空間とする．以下の条件 (1)，(2) を満たす写像 $f : V \to W$ を **線形写像** という．
    (1) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$ が成り立つ．
    (2) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$，$k \in \mathbb{R}$ に対して，$f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a})$ が成り立つ．
    これら (1)，(2) の性質を線形性という．
  - V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$，W の零ベクトルを $\mathbf{0}_W$ とする．このとき，$f : V \to W$ が線形写像ならば

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$

    が成り立つ．この対偶を取ると，$f(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$ ならば f は線形写像でない．
  - 例 1．A を $m \times n$ 行列とする．$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，f は線形写像となる．実際に，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = A\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}), \\ f(k\boldsymbol{a}) &= A(k\boldsymbol{a}) = kA\boldsymbol{a} = kf(\boldsymbol{a}). \end{aligned}$$

  - 例 2．$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 1 \end{bmatrix}$ で定める．このとき，

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

    なので，f は線形写像でない．
  - 例 3．$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$ で定める．このとき，f は線形写像の定義 (2) を満たさないので，線形写像でない．実際に，$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$k = 2$ に対して，

$$f(k\boldsymbol{a}) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2+2 \\ 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad kf(\boldsymbol{a}) = 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1+1 \\ 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

    となり，$f(k\boldsymbol{a}) \neq kf(\boldsymbol{a})$．

- **線形写像の決定（線形教科書 pp. 145–146）**
  - V, W をベクトル空間，$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を V のを基底とする．$\boldsymbol{b}_1, \ldots \boldsymbol{b}_n \in W$ に対して，
$$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1, \quad \ldots, \quad f(\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{b}_n$$
を満たす線形写像 $f : V \to W$ がただ一つ存在する．
  - 例．$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ を満たす線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を求める．
$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．まず，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ を満たす c_1, c_2 を求める．この式を変形すると
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x_1 - x_2\\-x_1 + x_2\end{bmatrix}$$
となる．よって，
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$
次に，この式を用いて，
$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) &= f\left((2x_1 - x_2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) \\ &\underset{\text{線形性}}{=} (2x_1 - x_2) f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) + (-x_1 + x_2) f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) \\ &\underset{\text{仮定}}{=} (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\-x_1 + 2x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$
を得る．以上で線形写像 f を求めることができた．
- **線形写像の核，像（線形教科書 pp. 139–142, 147–154）**
  - V, W をベクトル空間，$f : V \to W$ を線形写像とする．このとき，$\mathrm{Ker}\,(f) = \{\boldsymbol{a} \in V \mid f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}_W\}$ を f の核といい，$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in V\}$ を f の像という．$\mathrm{Ker}\,(f)$ は V の部分空間となり，$\mathrm{Im}\,(f)$ は W の部分空間となる．
  - A を $m \times n$ 行列とする．$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定められる線形写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を考える．このとき，$\mathrm{Ker}\,(f_A)$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 $N(A)$ に一致する．また，$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ に対して，
$$\mathrm{Im}\,(f_A) = \langle f_A(\boldsymbol{e}_1), \ldots f_A(\boldsymbol{e}_n)\rangle \quad \cdots \quad （ア）$$
となる．すなわち，$\mathrm{Im}\,(f_A)$ は $f_A(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f_A(\boldsymbol{e}_n)$ で生成される．$A = [\boldsymbol{a}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{a}_n]$ と表せば，$f_A(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a}_1, \ldots, f_A(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{a}_n$ なので，（ア）は $\mathrm{Im}\,(f_A) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\rangle$ となる．
  - 写像 $f : V \to W$ が単射であるとは，任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \Rightarrow f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{b})$ が成り立つことをいう．また，f が全射であるとは，$f(V) = W$ が成り立つことをいう．
  - $f : V \to W$ が線形写像であるとき，次の (1)–(3) が成り立つ．
(1) f が単射 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(f) = \{\boldsymbol{0}_V\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(f) = 0$.
(2) f が全射 $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(f) = W \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\,(f) = \dim W$.
(3) $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,(f) + \dim \mathrm{Im}\,(f)$

【小テスト：オンライン受験】

$\boxed{1}$ 以下の設問に答えよ．

(1) 線形写像をつぎの（ア）から（エ）の中から選べ．

（ア） $f(x) = x + 1$ （イ） $f(x) = x^2$ （ウ） $f(x) = 2x$ （エ） $f(x) = 1$

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ をみたす線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対して，$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ の第 1 成分をつぎの（ア）から（エ）の中から選べ．

（ア） 1 （イ） 2 （ウ） 3 （エ） 4

(3) 4×5 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，$\dim \mathrm{Im}(f)$ の値をつぎの（ア）から（エ）の中から選べ．

（ア） 1 （イ） 2 （ウ） 3 （エ） 4

(4) (3) の線形写像 f に対して $\dim \mathrm{Ker}(f)$ の値をつぎの（ア）から（エ）の中から選べ．

（ア） 1 （イ） 2 （ウ） 3 （エ） 4

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ 以下の設問に答えよ．

(1) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ は $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ をみたすとする．

このとき，$f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ．

(2) (1) の線形写像 f に対して，$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ を求めよ．

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1+a \\ 4 & 5 & 6 & 2a \\ 7 & 8 & 9 & 1-a \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，f が全射にならないように a の値を定めよ．また，そのときの $\mathrm{Im}\,(f)$ の次元を求めよ．

(4) (3) の A に対して線形写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を $g(\boldsymbol{x}) = {}^t A\boldsymbol{x}$ で定める．このとき，g が単射とならないように a の値を定めよ．また，そのときの $\mathrm{Ker}\,(g)$ の基底を 1 組求めよ．

【自習用問題】

$\boxed{3}$（演習書：問題 12.1.1）以下の写像が線形写像になるかどうか調べよ．

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(4) $f(p(t)) = p'(t)$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_2$．ただし，$\mathbb{R}[t]_n$ は n 次以下の実係数多項式全体からなるベクトル空間とする．

$\boxed{4}$（演習書：問題 12.2.4）$m \times n$ 行列 A を次のように定めるとき，おのおのの A が決める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について以下の問いに答えよ．

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(1) $\mathrm{Ker}\,(f)$ の次元と基底を求めよ．（$\{\mathbf{0}\}$ の場合，基底は無し，次元は 0 であることに注意せよ．）

(2) $\mathrm{Im}\,(f)$ の次元と基底を求めよ．

(3) f は単射であるか，全射であるか．

$\boxed{5}$ 線形写像 $D : \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_3$ を

$$D(p(t)) = 2p(t) - (t+1)p'(t) \quad (p(t) \in \mathbb{R}[t]_3)$$

と定義する．D の核の次元および基底を求めよ．さらに，D の像の次元および基底を求めよ．