数学演習第二（演習第9回）

線形：線形写像，核と像の解答例

2021年12月22日 実施分

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$

(1) **（ア）**と**（エ）**は $f(0) \neq 0$ なので線形写像でない．**（イ）**は線形写像の定義 $f(kx) = kf(x)$ をみたさない．実際に，$x = 1$，$k = 2$ とすると，

$$f(kx) = f(2) = 4, \quad kf(x) = 2$$

となり，$f(kx) \neq kf(x)$．**（ウ）**は線形写像の定義をすべてみたす．よって，<u>答えは**（ウ）**</u>．

(2) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表されるので，

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) - 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

となり，第1成分は1．よって，<u>答えは**（ア）**</u>．

(3) $\dim \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{rank}\, A = 3$ となる．よって，<u>答えは**（ウ）**</u>．

(4) $\dim \mathbb{R}^5 = \dim \mathrm{Ker}\,(f) + \dim \mathrm{Im}\,(f) \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(f) = 5 - 3 = 2$ となる．よって，<u>答えは**（イ）**</u>．

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$

(1) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ なので,

$$f\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 4f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - 2f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

(2) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_2 - x_1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_3 - x_2)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ なので,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= x_1 f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (x_2 - x_1) f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + (x_3 - x_2) f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (x_2 - x_1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (x_3 - x_2)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1+a \\ 4 & 5 & 6 & 2a \\ 7 & 8 & 9 & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1+a \\ 0 & 3 & 6 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 \end{bmatrix}$ となる．f が全射でない $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}\,(f) \neq \dim \mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A \neq 3$ なので，a の値は $\boxed{a = \dfrac{1}{2}}$．このとき，$\boxed{\dim \mathrm{Im}\,(f) = 2}$.

(4) $\operatorname{rank} {}^t A = \operatorname{rank} A$ なので，$\dim \mathrm{Im}\,(g) = \operatorname{rank} A$ となる．$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Ker}\,(g) + \dim \mathrm{Im}\,(g)$ より，$\dim \mathrm{Ker}\,(g) = 3 - \operatorname{rank} A$ を得る．g が単射でない $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(g) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank} A \neq 3$ より，a の値は $\boxed{a = \dfrac{1}{2}}$．このとき,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1+a & 2a & 1-a \end{bmatrix} \underset{(a=\frac{1}{2})}{=} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

なので，$\mathrm{Ker}\,(g)$ の基底として，$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$ を取ることができる.

【自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$

(1) 任意の $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ と任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して，$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+(x_3+y_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ y_1+y_3 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right)$，$f\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1+kx_2 \\ kx_1+kx_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} = kf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ が成り立つ．よって，$\underline{f\text{ は線形写像である}}$.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となるので，$\underline{f\text{ は線形写像ではない}}$.

(3) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$k = 2$ とすると $f\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) \neq kf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ となる．実際に，$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 12$，$2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 3 = 6$．よって，$\underline{f\text{ は線形写像ではない}}$.

(4) $p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]_3$，$k \in \mathbb{R}$ に対して $f(p(t)+q(t)) = p'(t)+q'(t) = f(p(t))+f(q(t))$，$f(kp(t)) = kp'(t) = kf(p(t))$ が成り立つ．よって，$\underline{f\text{ は線形写像である}}$.

$\boxed{4}$

(i) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$．よって，$\mathrm{Ker}\,(f)$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができて，$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1}$ である.

(2) $\mathrm{Im}\,(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり，$\mathrm{Im}\,(f)$ の基底はこれら 3 つのベクトルの中から一次独立な最大個数の組を選べばよい．A の簡約行列の主成分は 1 列と 3 列にあるので，3 つのベクトルから 1 番目と 3 番目を選んだ組，すなわち $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$ を $\mathrm{Im}\,(f)$ の基底として選ぶことができる．よって，$\boxed{\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2}$ となる.

(3) $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$，$\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim \mathbb{R}^2$ なので，$\underline{f\text{ は単射でないが全射である}}$.

(ii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので，$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$ となる．よって，$\mathrm{Ker}\,(f)$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$ を選ぶことができて，$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1}$ である.

(2) $\mathrm{Im}\,(f) = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\7\end{bmatrix} \right\rangle$ であり，A の簡約行列の主成分が 1 列目と 2 列目にあることから，

$\mathrm{Im}\,(f)$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix} \right)}$ を選ぶことができる．よって，$\boxed{\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 2}$ となる．

(3) $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 1$，$\dim(\mathrm{Im}\,(f)) \neq \dim \mathbb{R}^3$ なので，$\underline{f\text{ は単射でも全射でもない}}$．

(iii) (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ なので，連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみ．すなわち，

$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \{\mathbf{0}\}}$，$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 0}$ である．

(2) $\mathrm{Im}\,(f) = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix} \right\rangle$ であり，A の簡約行列の主成分がすべての列にあることから，

$\mathrm{Im}\,(f)$ の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix} \right)}$ を選ぶことができる．よって，$\boxed{\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = 3}$．

(もしくは，$\mathrm{Im}\,(f)$ が $\mathbb{R}^3$ と一致することから，$\mathrm{Im}\,(f)$ の基底として，$\mathbb{R}^3$ の標準基底を選んでもよい．)

(3) $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 0$，$\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim \mathbb{R}^3$ なので，$\underline{f\text{ は単射かつ全射 (全単写) である}}$．

$\boxed{5}$ まず，核について考える．$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ とおくと，

$$\begin{aligned} D(p(t)) &= 2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) - (t+1)(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2) \\ &= (2a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)t - 3a_3 t^2 - a_3 t^3 \end{aligned}$$

となる．これより，$p(t) \in \mathrm{Ker}\,(D)$ となるための必要十分条件は，$2a_0 - a_1 = 0$，$a_1 - 2a_2 = 0$，$a_3 = 0$ となることである．この連立一次方程式を解いて，$a_0 = c$，$a_1 = 2c$，$a_2 = c$，$a_3 = 0$ (c は任意) を得る．すなわち，$p(t) \in \mathrm{Ker}\,(D) \Leftrightarrow p(x) = c(1 + 2t + t^2)$．よって，$\mathrm{Ker}\,(D)$ の基底として $(1 + 2t + t^2)$ を選ぶことができて，$\dim(\mathrm{Ker}\,(D)) = 1$ となる．

次に，像について考える．$\mathbb{R}[t]_3$ の基底として，$(1, t, t^2, t^3)$ を取ると，$D(1) = 2$，$D(t) = -1 + t$，$D(t^2) = -2t$，$D(t^3) = -3t^2 - t^3$ であることから，$\mathrm{Im}\,(D) = \langle 2, -1+t, -2t, -3t^2 - t^3 \rangle$ となる．ここで，$-2t = -1 \times 2 - 2 \times (-1 + t)$ であることから，$\mathrm{Im}\,(D)$ の基底として，$(2, -1+t, -3t^2 - t^3)$ を取ることができて，$\dim(\mathrm{Im}\,(D)) = 3$ となる．