数学演習第二（演習 第10回）

微積：重積分 [1]（重積分の定義，累次積分）

2022年1月5日 実施

- 小テストの問題は $\boxed{1}$ の4問です．レポート課題は $\boxed{2}$ の4問です．
- それ以外の問題は自習用問題です（こちらも是非解いてください）．
- 要点もよく読むこと．また，問題を解く際には積分領域をかならず図示してみること．
- レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いてください．

【要点】

- **累次積分の定義（微積教科書 pp. 109–110）**
  - $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で連続であるとする．
    $D=\{(x,y)\mid a\leqq x\leqq b,\ \varphi_1(x)\leqq y\leqq \varphi_2(x)\}$ の場合（x に関して単純な領域の場合）
    まず，x を固定して，連続関数 $f(x,y)$ を y について $\varphi_1(x)$ から $\varphi_2(x)$ まで積分する：
    $$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (x\in[a,b])$$
    このとき，$F(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で連続であることが示される（例えば，宮島 静雄 著『微分積分学 II －多変数の微分積分－』，共立出版，2003．の命題 4.23 参照）．よって，微積教科書の定理 3.4.1 から，$F(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ で積分可能である．そこで，$F(x)$ を a から b まで積分したもの $\displaystyle\int_a^b F(x)\,dx$ を $\displaystyle\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ で表す．
  - $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ は有界閉区間 $[c,d]$ で連続であるとする．
    $D=\{(x,y)\mid c\leqq y\leqq d,\ \psi_1(y)\leqq x\leqq \psi_2(y)\}$ の場合（y に関して単純な領域の場合）
    x に関して単純な領域の場合と同様に，連続関数 $g(x,y)$ を x について $\psi_1(y)$ から $\psi_2(y)$ まで積分したもの $\displaystyle G(y)=\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} g(x,y)\,dx$ を，さらに c から d まで積分したもの $\displaystyle\int_c^d G(y)\,dy$ を $\displaystyle\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} g(x,y)\,dx$ で表す．
  - $\displaystyle\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ と $\displaystyle\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ をまとめて **累次積分** (iterated integral, repeated integral) という．ただし，“単純な領域”という用語は一般的でない（そのような言い方は余り普及していない）．

- **累次積分と2重積分の関係（微積教科書 pp. 111–112）**
  - D が（x または y に関して）単純な領域の場合には累次積分と2重積分の値は一致する．すなわち，D が x に関して単純な領域の場合には
    $$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad \cdots \quad (\text{イ})$$
    となり，D が y に関して単純な領域の場合には
    $$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \quad \cdots \quad (\text{ロ})$$
    となる．ただし，$f(x,y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ は連続関数とする．
  - 例1（微積教科書 p. 115, 2 (3)）
    $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0\}$ のとき $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求める．D を x に関して単純な領域で表すと，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq \sqrt{1-x^2}\}$ となるので，
    $$\iint_D x\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy=\int_0^1 x\cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{2}{3}\int_0^1\left\{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'dx=\frac{2}{3}$$

を得る．また，$D = \{(x,y) \mid -1 \leqq y \leqq 1,\, 0 \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}\}$ のように，y に関して単純な領域でも表すことができるので，

$$\iint_D x\,dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2}\,dy = \int_0^1 (1-y^2)\,dy = \frac{2}{3}$$

と計算してもよい．

– 例 2（微積教科書 p. 115, 2（7））

  3 変数関数 $f(x,y,z)$ の場合にも同様に累次積分を定義することができ，それを利用して 3 重積分を計算することができる．例えば，$D = \{(x,y,z) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\, 0 \leqq y \leqq 1-x,\, 0 \leqq z \leqq 1-x-y\}$ のとき $\iiint_D z\,dxdydz$ を計算してみると，

$$\begin{aligned}\iiint_D z\,dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\,dx = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

  となる．

- **累次積分の積分順序の交換（微積教科書 p. 113）**

– 例 3（微積教科書 p. 115, 3（1））

  累次積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換する．すなわち，先に y で積分して後に x で積分したものを，先に x で積分して後に y で積分する形に書き換える．

  $D = \{(x,y) \mid -1 \leqq x \leqq 1,\, 0 \leqq y \leqq 2\sqrt{1-x^2}\}$ とおくと，累次積分と 2 重積分の関係（イ）より，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$

  が成り立つ．一方，D は $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 2,\, -\sqrt{1-(y^2/4)} \leqq x \leqq \sqrt{1-(y^2/4)}\}$ とも表されるので，累次積分と 2 重積分の関係（ロ）より，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y^2/4)}}^{\sqrt{1-(y^2/4)}} f(x,y)\,dx$$

  が成り立つ．以上より，

$$\int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y^2/4)}}^{\sqrt{1-(y^2/4)}} f(x,y)\,dx$$

  となり，積分順序を交換することができた．

– 例 4（微積教科書 p. 115, 3（2））

  累次積分 $\displaystyle\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換する．$D = \{(x,y) \mid -2 \leqq x \leqq 1,\, x^2 \leqq y \leqq -x+2\}$ とおく．D を y に関して単純な領域の形で表すと，次の 2 つの領域に分割される ($D = D_1 \cup D_2$).

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\, -\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y}\}, \\ D_2 &= \{(x,y) \mid 1 \leqq y \leqq 4,\, -\sqrt{y} \leqq x \leqq 2-y\}.\end{aligned}$$

  よって，

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,y)\,dy &= \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx\end{aligned}$$

  となる．記法の注意として，$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ なので，$D = D_1 + D_2$ と表記するのは適切でない．

- **空間図形の体積（微積教科書 p. 129）**
  - $\mathbb{R}^3$ 内の空間図形 V の体積 $v(V)$ は，V を平面 $x=t$ で切ったときの断面積 $S(t)$ を t について積分して求められる場合がよくある．ただし，t は断面が空集合にならない範囲を動く．
  - 例 5（球の体積）

    xyz 空間内において，原点中心，半径 $r>0$ の球面で囲まれた部分を B とし，B の体積 $v(B)$ を求める．B を平面 $x=t$ で切ったときの断面は円：$y^2+z^2=r^2-t^2$ なので，断面積 $S(t)$ は $S(t)=\pi(r^2-t^2)$ となる．また，t の動く範囲は $-r \leqq t \leqq r$ である．よって，

    $$v(B)=\int_{-r}^{r} S(t)\,dt = 2\pi\int_0^r (r^2-t^2)\,dt = \frac{4}{3}\pi r^3$$

    を得る．

    【注】 断面積を求める際には平面 $y=t$ や平面 $z=t$ で切ってもよい．計算しやすいものを選択すること．ただし，一般に，切り方を変えると断面積 $S(t)$ や t の動く範囲も変わるので注意する．

【小テスト：オンライン受験】

$\boxed{1}$ $D=\{(x,y)\mid y\leqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1\}$，$f(x,y)$ は D で連続であるとし，$I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ とする．

(1) $I=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ と表したとき，次の **（ア）** から **（エ）** の中から正しいものを <u>すべて選べ</u>．

（ア） $a=0$　**（イ）** $b=1$　**（ウ）** $\varphi_1(x)=-\sqrt{1-x^2}$　**（エ）** $\varphi_2(x)=0$

(2) $I=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ と表したとき，次の **（ア）** から **（エ）** の中から正しいものを <u>すべて選べ</u>．

（ア） $c=-1$　**（イ）** $d=1$　**（ウ）** $\psi_1(y)=-\sqrt{1-y^2}$　**（エ）** $\psi_2(y)=0$

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$ のとき，I の値を次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） $-\frac{2}{3}$　**（イ）** $\frac{2}{3}$　**（ウ）** $-\frac{4}{3}$　**（エ）** $\frac{4}{3}$

(4) $f(x,y)=1-x^2$ のとき，I の値を次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） $\frac{3\pi}{16}$　**（イ）** $\frac{3}{8}$　**（ウ）** $\frac{3\pi}{8}$　**（エ）** $\frac{3}{4}$

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ 以下の設問に答えよ．

(1) 連続関数 $f(x,y)$ に対して，$I=\int_{-1}^{2} dy\int_{y^2-2y-2}^{-y^2+2} f(x,y)\,dx$ の積分順序を交換せよ．

(2) $J=\frac{1}{2}\iint_D (x^3+y-|x^3-y|)\,dxdy$，$D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ の値を求めよ．

(3) 空間図形 $C: y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1,\ |z|\leqq y$ を平面 $y=t$ で切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ．

(4) (3) の C の体積 $v(C)$ を求めよ．

【自習用問題】

$\boxed{3}$ 次の 2 重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$, $D: y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 2y$ （演習書：問題 6.1.2（1）改題）

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$, $D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$ （演習書：問題 6.1.2（2））

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dxdy$, $D: x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0$ （演習書：問題 6.1.2（3））

(4) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dxdy$, $D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq \frac{\pi}{2}$ （演習書：問題 6.1.2（4））

(5) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$, $D: x \geqq 0,\ y \leqq 2,\ \sqrt{x} \leqq y$ （演習書：問題 6.1.2（5））

(6) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy$, $D: x^2+y^2 \leqq x$ （演習書：問題 6.1.2（6））

$\boxed{4}$ 次の累次積分の積分順序を交換せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$ （演習書：問題 6.1.3（1））

(2) $\displaystyle\int_1^2 dy \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dx$ （演習書：問題 6.1.3（5））

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} dy \int_0^{1+\cos y} f(x,y)\,dx$ （演習書：問題 6.1.3（6））

$\boxed{5}$ 次の 2 重積分および累次積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \sin\frac{y}{x}\,dxdy$, $D: 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}x,\ \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ （演習書：問題 6.1.4（3））

(2) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2}\,dx$

$\boxed{6}$ 次の空間図形の体積を求めよ.

(1) $V_1:\ x \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq y^2$ (2) $V_2:\ x^2+z^2 \leqq 1,\ y^2+z^2 \leqq 1$

［手順］

(a) 立体 V_k を, 平面 $x=t$ で切った断面図を yz-平面に描く. さらに, 断面が空集合にならない t の範囲も求める.

(b) 同様に, 平面 $y=t$ で切った断面図を xz-平面に, 平面 $z=t$ で切った断面図を xy-平面に描く.
(断面が空集合にならない t の範囲も求める)

(c) (a),(b) の 3 方向の断面のうち簡単なものに注目し, 体積が断面積の積分であることを利用して求める.