数学演習第二（演習 第10回）

微積：重積分 [1]（重積分の定義，累次積分）の解答例

2022年1月5日 実施分

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$ **小テスト**

$D = \{(x,y) \mid -1 \leqq x \leqq 1,\, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq 0\} = \{(x,y) \mid -1 \leqq y \leqq 0,\, -\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}\}$ と表せるので

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx. \quad \cdots \quad (*)$$

(1) $(*)$ より <u>答えは **（イ）**，**（ウ）**，**（エ）**</u>．

(2) $(*)$ より <u>答えは **（ア）**，**（ウ）**</u>．

(3) $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ のとき，$(*)$ より，

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,dx = 2\int_{-1}^{0} (1-y^2)\,dy = -2\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

となる．よって，<u>答えは **（エ）**</u>．

(4) $f(x,y) = 1-x^2$ のとき，$(*)$ より，

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} (1-x^2)\,dy = 2\int_{0}^{1} (1-x^2)^{3/2}\,dx \\ &\underbrace{=}_{x=\sin t\ (0\leqq t\leqq \pi/2)} 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^4 t\,dt = 2\cdot\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

となる．よって，<u>答えは **（ウ）**</u>．

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$ レポート課題

前文 重積分の値を計算する際には積分領域を正しく把握することが重要である．重積分の計算問題を解くときには，まずは積分領域を描こう．ただし，積分領域が容易に図示できない場合もある．例えば，$E:\ x^2+2xy+2y^2 \leqq 1$ (微積教科書 p. 121), $L:\ (x^2+y^2)^2 \leqq x^2-y^2$, $F:\ (x^2+y^2)^3 \leqq 8x^2y^2$ などがそうであろう．むろん，これらは人工的な図形でなく，ある種の意義があるものである．また，積分値を求めるのは式による計算なので，積分領域を不等式によって表せないと，そもそも計算を実行することができない．さらに，演習書の問題 **6.2.2** (2), (4) のように D を図示しても適切な変数変換はわからない．積分の計算が実行できる関数は限られているからである．よって，結論としては，積分領域と被積分関数の形の両方を注意深く見る必要があるといえよう．

(1) まず，$(y-1)^2-3 \leqq x \leqq -y^2+2\ (-1 \leqq y \leqq 2)$ から，$-3 \leqq x \leqq 2$ がわかる．また，$y^2-2y-2 \leqq x$ より，$1-\sqrt{x+3} \leqq y \leqq 1+\sqrt{x+3}$ を得る．同様に，$x \leqq -y^2+2$ から，$-\sqrt{2-x} \leqq y \leqq \sqrt{2-x}$ が導かれる．よって，$\max\{\ 1-\sqrt{x+3},\ -\sqrt{2-x}\ \} \leqq y \leqq \min\{\ 1+\sqrt{x+3},\ \sqrt{2-x}\ \}$ を知る．ここで，$-\sqrt{2-x} \leqq 1-\sqrt{x+3}$ と同じ $\sqrt{x+3} \leqq 1+\sqrt{2-x}$ は $x+3 \leqq 3-x+2\sqrt{2-x}$ と同値で，これは $x \leqq \sqrt{2-x}$ と表せる．$(-3 \leqq)\ x \leqq 0$ のときはこの不等式は成立している．そこで，$(2 \geqq)\ x \geqq 0$ の場合, 同値な $x^2 \leqq 2-x$ より, $(x+2)(x-1) = x^2+x-2 \leqq 0$ なので，$-3 \leqq x \leqq 1$ と $-\sqrt{2-x} \leqq 1-\sqrt{x+3}$ とは同値なことがわかった．同様に，$\sqrt{2-x} \leqq 1+\sqrt{x+3}$ と同じ $\sqrt{2-x}-1 \leqq \sqrt{x+3}$ は $1 \leqq x \leqq 2$ のときは成立する．そこで, $x \leqq 1$ の場合, 同値な $3-x-2\sqrt{2-x} \leqq x+3$ は $-\sqrt{2-x} \leqq x$ と書けるが，これは $0 \leqq x \leqq 1$ ならば成立するので，$x \leqq 0$ のときを調べればよい．このとき，$x^2 \leqq 2-x$ と同値だが，$(x-1)(x+2) = x^2+x-2 \leqq 0$ より，$x \geqq -2$ が得られた．よって，$-2 \leqq x \leqq 2$ と $\sqrt{2-x} \leqq 1+\sqrt{x+3}$ とは同値なことが示された．もちろん，積分領域を図示して積分順序を交換してもよい．故に，以上から

$$\boxed{I = \int_{-3}^{-2} dx \int_{1-\sqrt{x+3}}^{1+\sqrt{x+3}} f(x,y)\,dy + \int_{-2}^{1} dx \int_{1-\sqrt{x+3}}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)\,dy}$$ となる．

(2) D は次の D_1 と D_2 に分割される．

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x^3 \leqq y\} = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x^3 \leqq y \leqq 1\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x^3\} = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ \sqrt[3]{y} \leqq x \leqq 1\}.$$

よって，

$$J = \int_0^1 dx \int_{x^3}^1 x^3\,dy + \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^1 y\,dx = \int_0^1 x^3(1-x^3)\,dx + \int_0^1 y(1-\sqrt[3]{y})\,dy$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \boxed{\frac{5}{28}}.$$

(3) 平面 $y=t$ で C を切ったときの断面は矩形：$|x| \leqq \sqrt{1-t^2}$, $|z| \leqq t$ である．
よって，$\boxed{S(t) = 4t\sqrt{1-t^2}}$ となる．

(4) t は $0 \leqq t \leqq 1$ を動くので,

$$v(C) = \int_0^1 S(t)\,dt = -\frac{4}{3}\int_0^1 \{(1-t^2)^{3/2}\}'\,dt = -\frac{4}{3}\Big[(1-t^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

となる．

【自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$ 2 重積分の値を求める問題

(1) (i) y に関して単純な領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 2y\}$ とみなす場合.

$$\iint_D x^2 y\,dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^2 y\,dx = \int_0^1 y\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=y}^{x=2y} dy = \int_0^1 \frac{7}{3}y^4\,dy = \frac{7}{3}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \boxed{\frac{7}{15}}.$$

(ii) x に関して単純な領域とみなす場合．この場合，D は次の D_1 と D_2 に分割される．

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ \frac{1}{2}x \leqq y \leqq x\}, \quad D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ \frac{1}{2}x \leqq y \leqq 1\}.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y\,dxdy &= \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{x} x^2 y\,dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{1} x^2 y\,dy \\
&= \int_0^1 x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=x} dx + \int_1^2 x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^4\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx = \left[\frac{3}{40}x^5\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5\right]_1^2 = \boxed{\frac{7}{15}}.
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle \iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \underbrace{\int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,dy}_{\text{半径 } x \text{ の円の面積の } 1/4} = \int_0^1 \frac{\pi x^2}{4}\,dx = \left[\frac{\pi x^3}{12}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{12}}$. 円の面積で計算した部分は

$\displaystyle \int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}\Big(y\sqrt{x^2-y^2} + x^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{y}{x}\Big)\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{\pi x^2}{4}$ $(x>0)$ と計算することもできる．

【別法】 次の計算は全く推奨しないが，参考までに記す．累次積分の順序を交換すると，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2-y^2}\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2-y^2} - y^2\log\big(x+\sqrt{x^2-y^2}\,\big)\Big)\right]_{x=y}^{x=1} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\sqrt{1-y^2} - y^2\big\{\log\big(1+\sqrt{1-y^2}\,\big) - \log y\big\}\Big)\,dy.
\end{aligned}$$

ここで， $\displaystyle \int_0^1 y^2\big\{\log\big(1+\sqrt{1-y^2}\,\big) - \log y\big\}\,dy$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{y^3}{3}\big\{\log\big(1+\sqrt{1-y^2}\,\big) - \log y\big\}\right]_{+0}^1 - \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big(\frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}}\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{y}\Big)\,dy \\
&= -\int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big(\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y^2}\frac{-y}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{y}\Big)\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1-(1-y^2)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \sqrt{1-y^2}\Big)\,dy.
\end{aligned}$$

故に, $\displaystyle (\text{与式}) = \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{12}}$.

(3) $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{a^2-x^2}\}$ と表せる (原点中心, 半径 a の円の右半分).

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dxdy &= \int_0^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dy = \int_0^a 2\left[\frac{xy^3}{3\sqrt{a^2-x^2}}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
&= \int_0^a \frac{2}{3}x(a^2-x^2)\,dx = \left[\frac{1}{3}a^2x^2 - \frac{1}{6}x^4\right]_0^a = \boxed{\frac{a^4}{6}}.
\end{aligned}$$

【別法】累次積分の順序を交換すると， $\displaystyle (\text{与式}) = \int_{-a}^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{xy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$

$\displaystyle \int_{-a}^a \left[-y^2\sqrt{a^2-x^2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{a^2-y^2}} dy = \int_{-a}^a \underbrace{y^2(a-|y|)}_{\text{偶関数}}\,dy = 2\int_0^a y^2(a-y)\,dy = 2\left[\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^a = \boxed{\frac{a^4}{6}}$.

(4) $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2},\, 0\leqq y\leqq \frac{\pi}{2}-x\}$ として,

$$\iint_D \cos(x+y)\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sin(x+y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)dx=\left[x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\pi}{2}-1}.$$

(5) $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 4,\, \sqrt{x}\leqq y\leqq 2\}$ として,

$$\iint_D (x+y)\,dxdy=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2(x+y)\,dy=\int_0^4\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=2}dx$$
$$=\int_0^4\left(2x+2-x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\int_0^4\left(\frac{3}{2}x+2-x^{\frac{3}{2}}\right)dx=\left[\frac{3}{4}x^2+2x-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4=\boxed{\frac{36}{5}}.$$

(6) D は中心 $(1/2,0)$, 半径 $1/2$ の円であり, $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\, -\sqrt{x-x^2}\leqq y\leqq \sqrt{x-x^2}\}$ と表せる.

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x}\,dy=\int_0^1\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1 2x\sqrt{1-x}\,dx$$
$$=\int_1^0 2(1-t^2)t\cdot(-2t)\,dt=4\int_0^1(t^2-t^4)\,dt=\boxed{\frac{8}{15}}.\qquad (t=\sqrt{1-x}\text{ で置換した})$$

置換せずに, $x\sqrt{1-x}=\{1-(1-x)\}\sqrt{1-x}=(1-x)^{1/2}-(1-x)^{3/2}$ と変形してもよい.

【別法】 次の計算は全く推奨しないが, 参考までに記す. 累次積分の順序を交換すると,

$$(\text{与式})=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}}\sqrt{x}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{x=\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}}dy$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}dy=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3\frac{\theta}{2}-\sin^3\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta\,d\theta.$$

最後は $y=\frac{1}{2}\sin\theta$ で置換した. 更に $\phi=\theta/2$ とおいて,

$$(\text{与式})=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3\phi-\sin^3\phi)\cos 2\phi\,d\phi$$
$$=\frac{4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos\phi)(1-\sin^2\phi)\cdot(1-2\sin^2\phi)\,d\phi-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\phi)(1-\cos^2\phi)\cdot(2\cos^2\phi-1)\,d\phi\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-u^2)(1-2u^2)\,du+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(1-v^2)(2v^2-1)\,dv\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^1(1-u^2)(1-2u^2)\,du=\frac{4}{3}\int_0^1(1-3u^2+2u^4)\,du=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}=\boxed{\frac{8}{15}}.$$

4 累次積分の積分順序を交換する問題

(1) $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 1,\, x^2\leqq y\leqq 2-x\}$ とおくと $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)\,dy$ となる. D を y に関して単純な領域とみなすと, 次の D_1 と D_2 に分割される.

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq 1,\, 0\leqq x\leqq \sqrt{y}\},\quad D_2=\{(x,y)\mid 1\leqq y\leqq 2,\, 0\leqq x\leqq 2-y\}.$$

よって,

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x}f(x,y)\,dy=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D_1}f(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2}f(x,y)\,dxdy$$
$$=\boxed{\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y}f(x,y)\,dx}.$$

(2) $D=\{(x,y)\mid 1\leqq x\leqq 2,\, x^2\leqq y\leqq x^3\}$ とおくと，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_1^2 dx\int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dy$ となる．
累次積分の積分順序を交換するとは，x に関して単純な領域 D を y に関して単純な領域（のいくつかの和集合）として表すことで，$x^2\leqq y\leqq x^3$ **を** x **について解くこと**である．そこで，$x>0, y>0$ より，$x^2\leqq y$ と $x\leqq\sqrt{y}$ は同値で，$y\leqq x^3$ と $\sqrt[3]{y}\leqq x$ も同値である．つまり，$x^2\leqq y\leqq x^3$ は $\sqrt[3]{y}\leqq x\leqq\sqrt{y}$ と同値である．また，$1\leqq y\leqq 8$ から，$1\leqq\sqrt[3]{y}$ なので，$D=\{(x,y)\mid 1\leqq y\leqq 8,\, \sqrt[3]{y}\leqq x\leqq\min\{\sqrt{y},2\}\}$ がわかる．ここで，$\sqrt{y}\leqq 2$ と $(1\leqq)\, y\leqq 4$ は同値であるから，D を y に関して単純な領域とみなすと，次の D_1 と D_2 に分割される．

$$D_1=\{(x,y)\mid 1\leqq y\leqq 4,\, \sqrt[3]{y}\leqq x\leqq\sqrt{y}\},\quad D_2=\{(x,y)\mid 4\leqq y\leqq 8,\, \sqrt[3]{y}\leqq x\leqq 2\}$$

つまり，$D=D_1\cup D_2$ と表される．よって，

$$\int_1^2 dx\int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dy=\boxed{\int_1^4 dy\int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_4^8 dy\int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)\,dx}.$$

(3) $D=\{(x,y)\mid 0\leqq y\leqq \pi,\, 0\leqq x\leqq 1+\cos y\}$ とおくと，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^\pi dy\int_0^{1+\cos y} f(x,y)\,dx$ となる．
x に関して単純な領域とみなすと $D=\{(x,y)\mid 0\leqq x\leqq 2,\, 0\leqq y\leqq \mathrm{Cos}^{-1}(x-1)\}$ なので，

$$\int_0^\pi dy\int_0^{1+\cos y} f(x,y)\,dx=\boxed{\int_0^2 dx\int_0^{\mathrm{Cos}^{-1}(x-1)} f(x,y)\,dy}.$$

$\boxed{5}$ 2 重積分の値を求める問題

(1) $\displaystyle\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right)dxdy=\int_{\frac12}^1 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy=\int_{\frac12}^1\left[-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x}dx=\int_{\frac12}^1 x\,dx=\boxed{\frac{3}{8}}.$

(2) $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$ が初等関数でないので，$\displaystyle\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ は計算できないため，積分順序を交換する．

$$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}\,dx=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}\,dy=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx=\int_0^1\left(\frac12 e^{x^2}\right)'dx=\left[\frac12 e^{x^2}\right]_0^1=\boxed{\frac12(e-1)}.$$

$\boxed{6}$ 空間図形の体積を求める問題

(1)

切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x=t$	$0\leqq t\leqq 1$	$\lvert y\rvert\leqq\sqrt{1-t^2},\ 0\leqq z\leqq y^2$	$\frac23(1-t^2)^{3/2}$
平面 $y=t$	$-1\leqq t\leqq 1$	$0\leqq x\leqq\sqrt{1-t^2},\ 0\leqq z\leqq t^2$	$t^2\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$0\leqq t\leqq 1$	$x\geqq 0,\, x^2+y^2\leqq 1,\, \sqrt{t}\leqq y$	$\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{t}-\sqrt{t(1-t)}$

$$v(V_1)=\int_0^1\frac23(1-t^2)^{3/2}\,dt=\frac23\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\cdot\cos\theta d\theta=\frac23\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{8}}.$$
$$v(V_1)=\int_{-1}^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt=2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\frac12\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta=\boxed{\frac{\pi}{8}}.$$

(2)

切断面	t の範囲	断面図の式	断面積
平面 $x=t$	$-1\leqq t\leqq 1$	$\lvert y\rvert\leqq\sqrt{1-t^2},\ y^2+z^2\leqq 1$	$2\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert+2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $y=t$	$-1\leqq t\leqq 1$	$\lvert x\rvert\leqq\sqrt{1-t^2},\ x^2+z^2\leqq 1$	$2\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert+2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$-1\leqq t\leqq 1$	$\lvert x\rvert\leqq\sqrt{1-t^2},\ \lvert y\rvert\leqq\sqrt{1-t^2}$	$4(1-t^2)$

$$v(V_2)=\int_{-1}^1 4(1-t^2)\,dt=4\cdot 2\int_0^1(1-t^2)\,dt=8\Big[t-\frac13 t^3\Big]_0^1=\boxed{\frac{16}{3}}.$$