数学演習第二 (第 11 回) 【解答例】

線形：線形写像の表現行列，表現行列と座標，基底変換行列　2022 年 1 月 12 日

【小テストの解答例】

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\mathcal{E}_2 = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ に対して $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ であるから，

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

となる．　<u>答：(ア)</u>

(2) $\mathcal{E}_2 = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ に対して $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ であるから，

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

となる．　<u>答：(ウ)</u>

(3) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] P$ となる P を求めるには，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ なる c_1, c_2 を求めればよい．言い換えると，$P = [[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}]$ である．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \to$ $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ より，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とわかるから，$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$．　<u>答：(イ)</u>

(4) 座標の間の関係は，$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} = P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ であることに注意すれば，
$[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a - b \end{bmatrix}$．　<u>答：(ア)</u>

【レポート課題の解答例】

$\boxed{\mathbf{2}}$ まず逆行列を準備しておく.

$$M_1=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3],\quad M_1^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-5&1&7\\1&7&-5\\7&-5&1\end{bmatrix},\quad M_2=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2],\quad M_2^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

(1) $M_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_i$ $(i=1,2,3)$ を解けばよい. $M_1^{-1}[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3]=\begin{bmatrix}0&7&2\\1&-3&0\\-1&0&-3\end{bmatrix}$ の各列ベクトルが $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の $\mathcal{A}$ に関する座標なので, $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}7\\-3\\0\end{bmatrix}$, $[\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}$.

(2) $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標を求めるには, $M_2\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{a}_i)$ $(i=1,2,3)$ を解けばよい. $M_2^{-1}[f(\boldsymbol{a}_1),f(\boldsymbol{a}_2),f(\boldsymbol{a}_3)]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&3&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$ であり, この各列が $f(\boldsymbol{a}_i)$ の $\mathcal{F}$ に関する座標を与えるので, $\mathcal{A},\mathcal{F}$ に関する表現行列は $\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$.

(3) f の線形性と (1) から, $f(\boldsymbol{b}_1)=f(\boldsymbol{a}_2)-f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{b}_2)=7f(\boldsymbol{a}_1)-3f(\boldsymbol{a}_2)=\begin{bmatrix}26\\-4\end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{b}_3)=2f(\boldsymbol{a}_1)-3f(\boldsymbol{a}_3)=\begin{bmatrix}7\\1\end{bmatrix}$. これらの $\mathcal{F}$ に関する座標は, $M_2^{-1}\begin{bmatrix}2&26&7\\0&-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&11&4\\1&15&3\end{bmatrix}$ の各列ベクトルになる. よって求める表現行列は, $\begin{bmatrix}1&11&4\\1&15&3\end{bmatrix}$.

(4) $g(\boldsymbol{v}_1)=\begin{bmatrix}-3\\-8\\17\end{bmatrix}$, $g(\boldsymbol{v}_2)=\begin{bmatrix}1\\0\\-7\end{bmatrix}$. それぞれの $\mathcal{A}$ に関する座標を求めるには, $M_1\boldsymbol{x}=g(\boldsymbol{v}_i)$ $(i=1,2)$ を解けばよい. $M_1^{-1}\begin{bmatrix}-3&1\\-8&0\\17&-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&-3\\-8&2\\2&0\end{bmatrix}$ の各列が $\mathcal{A}$ に関する座標を与えるので, 求める表現行列 $M=\begin{bmatrix}7&-3\\-8&2\\2&0\end{bmatrix}$.

【それ以外の自習用問題の解答例】

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 表現行列の定義から，$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ である．(2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので，$\dim N(A) = 1$ で基底の一例として $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ が取れる．$\dim C(A) = 2$ で基底の一例として $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ が取れる．これを V, W の元として書けば，$\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$ で基底として $(3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)$ が取れ，$\dim \mathrm{Im}\, f = 2$ で基底として $(-\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_4, -2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{b}_3+2\boldsymbol{b}_4)$ が取れる．（なお，$\mathrm{Im}\, f$ の基底はもう少し簡単に $(-\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_2)$ とも取れる．）

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $L(1) = 2, L(x) = x - 1, L(x^2) = -2x$ より，表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\dim N(A) = 1$ で基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ が取れ，$\dim C(A) = 2$ で基底として，$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ が取れる．これを $\mathbb{R}[x]_2$ の元に直せば，$\dim \mathrm{Ker}\, L = 1$ で基底として $(1 + 2x + x^2)$ が取れ，$\dim \mathrm{Im}\, L = 2$ で基底として $(2, x - 1)$ が取れる．（あるいはもっと簡単に $(1, x)$ ととっても良い．）

(3) $L(1 + x) = 1 + x, L(x + x^2) = -(1 + x), L(x^2) = -2(x + x^2) + 2x^2$ より，$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて，$P^{-1}AP$ と求めてもよい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} x - 2c_2 \\ y - (c_1 + c_2) \\ z - 2c_1 \end{bmatrix}$ より，$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}_1) = y + 2z - 5c_1 - c_2 = 0$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}_2) = 2x + y - c_1 - 5c_2 = 0$ となる．これより，$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + 2z \\ 2x + y \end{bmatrix}$ となるので，

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y + 2z \\ 2x + y \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y + 2z \\ 2x + y \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -x + 2y + 5z \\ 5x + 2y - z \end{bmatrix}.$$

(2) (1) より $[g(\boldsymbol{e}_1)]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $[g(\boldsymbol{e}_2)]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[g(\boldsymbol{e}_3)]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ となるので，g の $(\mathcal{E}_3, \mathcal{A})$ に関する表現行列は，$\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.