数学演習第二（演習 第12回）

微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）

2022 年 1 月 19 日

- 小テストの問題は $\boxed{1}$ の 4 問です．レポート課題は $\boxed{2}$ の 4 問です．
- それ以外の問題は自習用問題です（こちらも是非解いてください）．
- 要点もよく読むこと．<u>レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いてください</u>．

【要点】

- **2 重積分の変数変換（微積教科書 pp. 116–117）**
  - u, v の関数 $x(u,v)$, $y(u,v)$ に対して，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$ を **ヤコビアン** (Jacobian determinant) という．ヤコビアンは 19 世紀のドイツの数学者ヤコビ (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851) に由来する．ヤコビ行列式や関数行列式ともいう．$J(u,v) = x_u y_v - x_v y_u$ で表すこともある．
  - **【例 1】** $x(u,v) = u^2 + v$, $y(u,v) = u + v^2$ のとき，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{bmatrix} = 4uv - 1$ となる．
  - D, E は平面 $\mathbb{R}^2$ の有界な閉領域で，D, E の境界は連続で，かつ有限個の点を除いて C^1 級の曲線であるとする．区分的に C^1 級の写像 $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ は，uv 平面の領域 E を xy 平面の領域 D の上に 1 対 1 に写すとする．Φ が区分的に C^1 級とは，有限個の点を除いて $x(u,v)$, $y(u,v)$ が C^1 級で，$\Phi\colon E \to D$ が 1 対 1 とは，$(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2)$ ならば，$(x(u_1,v_1), y(u_1,v_1)) \neq (x(u_2,v_2), y(u_2,v_2))$ をみたすことを意味する．さらに，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ $((u,v) \in E)$ とする．このとき，D における連続関数 $f(x,y)$ に対して，**変数変換の公式**

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \quad \cdots \quad (*)$$

    が成り立つ．ヤコビアンの絶対値をとるのは，領域 D, E の向き (orientation) を考えないからである．特に**負の**面積（や体積）は考えない．
  - E と D の対応が 1 対 1 でなくても，またヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ が 0 となる点があっても，そのような点の集合の面積が 0（たとえば連続曲線とか有限個の点）であるならば，$(*)$ は成り立つ．
  - 変数変換の公式を運用するのは，$(*)$ の左辺が累次積分に書き直しても計算できないときや，計算できても複雑になるときで，$(*)$ の右辺が計算できるように，Φ を適切に選ぶ必要がある．よって，積分領域 E の形状だけでなく，$f(x(u,v), y(u,v)) \left| \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$ の形も考慮しなければならない．何故なら，1 変数関数の積分法を想起すれば，$(*)$ の左辺や右辺を累次積分に書き直しても計算できる場合は実際には限られているからである．例えば，演習 第 10 回の問題 $\boxed{5}$ (2), 演習 第 12 回の問題 $\boxed{2}$ (2) などがその場合である．

- **3 重積分の変数変換**

  2 重積分の場合と同様に，**変数変換の公式**

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

  が成り立つ．ただし，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ は 3 変数関数に対する**ヤコビアン**である．すなわち，

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix}.$$

【小テスト：オンライン受験】

$\boxed{1}$ I と J を次式で定める．

$$I = \iint_D (x^2 - y^2)^2 \, dxdy, \quad D : |x - y| \leqq 1, \, |x + y| \leqq 1,$$
$$J = \iiint_V z^2 \, dxdydz, \quad V : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} \leqq 4, \, 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4, \, y \geqq 0.$$

このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $u = -x + y, \, v = x + y$ とする．$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ の値として正しいものを次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） -2 **（イ）** $-\dfrac{1}{2}$ **（ウ）** $\dfrac{1}{2}$ **（エ）** 2

(2) I の値として正しいのもを次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） $-\dfrac{2}{9}$ **（イ）** $-\dfrac{1}{9}$ **（ウ）** $\dfrac{1}{9}$ **（エ）** $\dfrac{2}{9}$

(3) $x = r\cos\theta, \, y = r\sin\theta, \, z = 3w$ とする．$\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, w)}$ の値として正しいものを次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） $-3r$ **（イ）** $-\dfrac{r}{3}$ **（ウ）** $\dfrac{r}{3}$ **（エ）** $3r$

(4) J の値として正しいのもを次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） 10π **（イ）** $\dfrac{81\sqrt{3}\pi}{5}$ **（ウ）** 30π **（エ）** $\dfrac{162\sqrt{3}\pi}{5}$

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ 以下の設問に答えよ．

(1) $D = \{(x, y) \mid |2x - y| \leqq 1, \, |x - 2y| \leqq 1\}$ とする．2 重積分 $\displaystyle\iint_D |x - y| \, dxdy$ の値を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq \pi, \, y \geqq 0\}$ とする．2 重積分 $\displaystyle\iint_D \sin(x^2 + y^2) \, dxdy$ の値を求めよ．

(3) 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V e^z \, dxdydz, \quad V : x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4, \, x \geqq 0, \, z \leqq 0.$$

(4) 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V x \, dxdydz, \quad V : 1 \leqq x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4, \, x \geqq 0, \, y \geqq 0, \, \sqrt{x^2 + y^2} \leqq z \leqq \sqrt{3(x^2 + y^2)}.$$

【自習用問題】

$\boxed{3}$ 次の 2 重積分の値を求めよ．ただし，$a>0,\, b>0$ とする．

(1) $I_1=\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\,dxdy$，$D: x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \leqq 1$　（演習書：問題 6.2.2（2））

(2) $I_2=\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$，$D: x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, \sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}} \leqq 1$　（演習書：問題 6.2.2（3）の一部）

(3) $I_3=\displaystyle\iint_D \sqrt{2-(x-y)^2}\,dxdy$，$D: x^2+y^2 \leqq 1$　（演習書：問題 6.2.2（4）の類題）

$\boxed{4}$ 次の 2 重積分の値を求めよ．ただし，$a>0,\, b>0$ とする．

(1) $J_1=\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy$，$D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1$　（演習書：問題 6.2.2（1）の類題）

(2) $J_2=\displaystyle\iint_D \sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}\,dxdy$，$D: (x-1)^2+(y-1)^2 \leqq 1,\, \dfrac{1}{\sqrt{3}}x \leqq y \leqq \sqrt{3}x$

$\boxed{5}$ 次の 3 重積分の値を求めよ．ただし，p は実数とし，$0<a<b$ とする．

(1) $K_1=\displaystyle\iiint_V xyz\,dxdydz,\, V: 0 \leqq x+y \leqq 1,\, 0 \leqq y+z \leqq 1,\, 0 \leqq z+x \leqq 1.$

(2) $K_2=\displaystyle\iiint_V \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz,\, V: x^2+y^2+z^2 \leqq 1.$

(3) $K_3=\displaystyle\iiint_V \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{p}{2}}},\, V: a^2 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq b^2.$

$\boxed{6}$ 次の部分の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(1) 円柱 $x^2+y^2 \leqq a^2$ の平面 $z=0$ の上方にあり，平面 $z=x$ の下側にある部分．（演習書：問題 6.4.2（5））

(2) 円柱 $x^2+y^2 \leqq ax$ と 球 $x^2+y^2+z^2 \leqq a^2$ の共通部分．