数学演習第二（演習 第12回）

微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）の解答例

2022 年 1 月 19 日 実施分

【小テストの解答例】

1 小テスト

$$I = \iint_D (x^2-y^2)^2\,dxdy, \quad D: |x-y| \leqq 1,\, |x+y| \leqq 1,$$
$$J = \iiint_V z^2\,dxdydz, \quad V: x^2+y^2+\frac{z^2}{9} \leqq 4,\, 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\, y \geqq 0.$$

(1) $x = \dfrac{-u+v}{2}$, $y = \dfrac{u+v}{2}$ なので，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{2}$ となる．よって，<u>答えは **(イ)**</u>.

(2) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} (-u)^2 v^2\, |-1/2|\, dv = 2\int_0^1 u^2\,du \int_0^1 v^2\,dv = \frac{2}{9}$ となる．よって，<u>答えは **(エ)**</u>.

(3) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,w)} = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3r$ となる．よって，<u>答えは **(エ)**</u>.

(4) (r,θ,w) は $1 \leqq r \leqq 2$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, $-\sqrt{4-r^2} \leqq w \leqq \sqrt{4-r^2}$ を動くので，

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 dr \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 9w^2\,|3r|\,dw = 54\pi \int_1^2 dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} w^2 r\,dw = 18\pi \int_1^2 (4-r^2)^{3/2} r\,dr \\ &= 18\pi\left(-\frac{1}{5}\right)\int_1^2 \left\{(4-r^2)^{5/2}\right\}'\,dr = \frac{18\pi\cdot 3^{5/2}}{5} = \frac{162\sqrt{3}\pi}{5} \end{aligned}$$

となる．よって，<u>答えは **(エ)**</u>.

【レポート課題の解答例】

2 レポート課題

(1) $u = 2x-y$, $v = x-2y$ とおくと，$x = \dfrac{2u-v}{3}$, $y = \dfrac{u-2v}{3}$ となる．このとき，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}$$

となる．$E = \{(u,v) \mid |u| \leqq 1,\, |v| \leqq 1\}$ とおけば，$|x-y| = \dfrac{1}{3}|u+v|$ に注意して，E は次の E_1 と E_2 に分割される．

$$E_1 = \{(u,v) \mid |u| \leqq 1,\, |v| \leqq 1,\, v \leqq -u\}, \quad E_2 = \{(u,v) \mid |u| \leqq 1,\, |v| \leqq 1,\, v \geqq -u\}.$$

よって，

$$\begin{aligned} \iint_D |x-y|\,dxdy &= \iint_E \frac{1}{3}|u+v|\left|-\frac{1}{3}\right| dudv = \frac{1}{9}\left\{-\iint_{E_1}(u+v)\,dudv + \iint_{E_2}(u+v)\,dudv\right\} \\ &= \frac{1}{9}\left\{-\int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{-u}(u+v)\,dv + \int_{-1}^{1} du \int_{-u}^{1}(u+v)\,dv\right\} = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right) = \boxed{\frac{8}{27}}. \end{aligned}$$

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと，(r,θ) は $0\leqq r\leqq\sqrt{\pi}$, $0\leqq\theta\leqq\pi$ を動く．また，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ である．よって，

$$\iint_D \sin(x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^\pi d\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(r^2)\cdot|r|\,dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}(-\cos(r^2))'\,dr=\boxed{\pi}.$$

(3) $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ とおくと，$\cos\theta\leqq 0$, $\cos\varphi\geqq 0$ なので，(r,θ,φ) は

$$0\leqq r\leqq 2,\quad \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi,\quad -\frac{\pi}{2}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$$

を動く．また，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$ である．よって，

$$\iiint_V e^z\,dxdydz=\int_0^2 dr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{r\cos\theta}|r^2\sin\theta|\,d\varphi=\pi\int_0^2 dr\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d}{d\theta}\left(-re^{r\cos\theta}\right)\,d\theta$$
$$=\pi\int_0^2\left[-re^{r\cos\theta}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi}\,dr=\pi\int_0^2\left(r-re^{-r}\right)\,dr=\boxed{\pi\left(1+3\,e^{-2}\right)}.$$

【別法】 $V=\{(x,y,z)\mid -\sqrt{4-x^2-y^2}\leqq z\leqq 0,\,(x,y)\in D\}$, $D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\,x^2+y^2\leqq 4\}$ と見なすと，

$$\iiint_V e^z\,dxdydz=\iint_D dxdy\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{0}e^z\,dz=\iint_D(1-e^{-\sqrt{4-x^2-y^2}})\,dxdy$$

と表される．そこで，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと，(r,θ) は $0\leqq r\leqq 2$, $-\pi/2\leqq\theta\leqq\pi/2$ を動くので，

$$\iiint_V e^z\,dxdydz=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^2(1-e^{-\sqrt{4-r^2}})r\,dr=\pi\int_0^2(1-e^{-\sqrt{4-r^2}})r\,dr=\pi\left(2-\int_0^2 e^{-\sqrt{4-r^2}}r\,dr\right)$$

と書ける．ここで，$r=2\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi/2)$ とおくと

$$\int_0^2 e^{-\sqrt{4-r^2}}r\,dr=4\int_0^{\pi/2}e^{-2\cos t}\sin t\cos t\,dt=2\int_0^{\pi/2}(e^{-2\cos t})'\cos t\,dt$$
$$=2\left[e^{-2\cos t}\cos t+\frac{e^{-2\cos t}}{2}\right]_0^{\pi/2}=1-3e^{-2}$$

(4) $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ とおくと，$\cos\varphi\geqq 0$, $\sin\varphi\geqq 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq\tan\theta\leqq 1$ より，(r,θ,φ) は

$$1\leqq r\leqq 2,\quad \frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\quad 0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$$

を動く．また，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$ である．よって，

$$\iiint_V x\,dxdydz=\int_1^2 dr\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\sin\theta\cos\varphi\,|r^2\sin\theta|\,d\varphi=\int_1^2 r^3\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{15}{4}\cdot\frac{\pi+3\sqrt{3}-6}{24}=\boxed{\frac{5(\pi+3\sqrt{3}-6)}{32}}.$$

【自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$ 変数変換を用いて 2 重積分を計算する問題

(1) $u=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, $v=-\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ とおくと $x=\dfrac{a(u-v)}{2}$, $y=\dfrac{b(u+v)}{2}$ となる．このとき，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a/2 & -a/2\\ b/2 & b/2\end{vmatrix}=\frac{ab}{2}$$

となる．また，(u,v) は $0 \leqq u \leqq 1$, $-u \leqq v \leqq u$ を動く．よって，

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 du \int_{-u}^{u} \sqrt{\frac{a(u-v)}{2} \cdot \frac{b(u+v)}{2}} \left|\frac{ab}{2}\right| dv = \frac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{4} \int_0^1 du \int_{-u}^{u} \sqrt{u^2 - v^2}\, dv \\ &= \frac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{2} \int_0^1 du \int_0^u \sqrt{u^2 - v^2}\, dv\end{aligned}$$

となる．ここで，半径 u の四分円の面積は

$$\int_0^u \sqrt{u^2 - v^2}\, dv \underbrace{=}_{v = u\sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u\sqrt{1 - \sin^2\theta} \cdot u\cos\theta\, d\theta = u^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}u^2$$

なので，$I_1 = \dfrac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{8}\pi \displaystyle\int_0^1 u^2\, du = \boxed{\dfrac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{24}\pi}$.

【別法】 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b(a-x)/a\}$ と表すと，

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^a dx \int_0^{b(a-x)/a} \sqrt{x}\,\sqrt{y}\, dy = \frac{2}{3} \int_0^a \sqrt{x} \left[y^{3/2}\right]_{y=0}^{y=b(a-x)/a} dx \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^{3/2} \int_0^a (a-x)\sqrt{x}\,\sqrt{a-x}\, dx \underbrace{=}_{x = a\sin^2 t} \frac{2}{3}\frac{b^{3/2}}{a^{3/2}} a^3 \int_0^{\pi/2} 2\cos^4 t(1 - \cos^2 t)\, dt \\ &= \frac{4}{3}(ab)^{3/2} \left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}(ab)^{3/2} \frac{1}{16}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{(ab)^{3/2}\pi}{24}}.\end{aligned}$$

(2) $u = \sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $v = \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ とおくと，$x = au^2$, $y = bv^2$ となる．このとき，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2au & 0 \\ 0 & 2bv \end{vmatrix} = 4abuv$ となる．また，(u,v) は $E = \{(u,v) \mid u \geqq 0,\ v \geqq 0,\ u + v \leqq 1\}$ を動く．よって，

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^1 du \int_0^{1-u} abu^2v^2 \cdot |4abuv|\, dv = 4a^2b^2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} u^3v^3\, dv = 4a^2b^2 \int_0^1 \frac{1}{4}u^3(1-u)^4\, du \\ &= a^2b^2 \int_0^1 \{(u-1)+1\}^3(u-1)^4\, du = -a^2b^2\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{7} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = -a^2b^2 \frac{35 - 120 + 140 - 56}{8 \cdot 7 \cdot 5} = \boxed{\frac{a^2b^2}{280}}.\end{aligned}$$

(3) D が円でも極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ は本問では有効でない．何故なら，被積分関数 $\sqrt{2 - (x-y)^2} = \sqrt{2 - r^2 + r^2\sin 2\theta}$ の θ に関する積分が実行できないからである．そこで，$u = x - y$, $v = x + y$ とおくと，$u^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2)$ をみたすので，(u,v) は $u^2 + v^2 \leqq 2$ を動く．ここで，$x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{-u+v}{2}$ より，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$ となる．また，$E = \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leqq 2\}$ とすると，
$E = \{(u,v) \mid -\sqrt{2} \leqq u \leqq \sqrt{2},\ -\sqrt{2-u^2} \leqq v \leqq \sqrt{2-u^2}\}$ と表される．よって，

$$I_3 = \iint_E \sqrt{2-u^2}\,|1/2|dudv = 2\int_0^{\sqrt{2}} du \int_0^{\sqrt{2-u^2}} \sqrt{2-u^2}\, dv = 2\int_0^{\sqrt{2}} (2-u^2)\, du = \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{3}}.$$

4 極座標変換を用いて 2 重積分を計算する問題

(1) $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$ となる．(r,θ) は $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を動くので，

$$\begin{aligned}J_1 &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (ar\cos\theta + br\sin\theta)^2 abr\, d\theta = ab\int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{ab}{8} \int_0^{2\pi} \{(a^2 - b^2)\cos 2\theta + 2ab\sin 2\theta + a^2 + b^2\}\, d\theta = \boxed{\frac{ab(a^2+b^2)\pi}{4}}.\end{aligned}$$

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$ となる．また，$\sqrt{\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}}=\sqrt{\dfrac{2}{\sin 2\theta}}$ であり，(r,θ) は

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3},\quad \cos\theta+\sin\theta-\sqrt{\sin 2\theta}\leqq r\leqq\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{\sin 2\theta}$$

を動く．よって，

$$\begin{aligned}
J_2&=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\cos\theta+\sin\theta-\sqrt{\sin 2\theta}}^{\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{\sin 2\theta}}\sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}}\cdot|r|\,dr=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\int_{\cos\theta+\sin\theta-\sqrt{\sin 2\theta}}^{\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{\sin 2\theta}}r\,dr\\
&=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\cdot 2\sqrt{\sin 2\theta}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta=2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta=\boxed{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ **3 重積分を計算する問題**

(1) $u=x+y,\ v=y+z,\ w=z+x$ とおくと，$u+v+w=2(x+y+z)$ より，$x=\dfrac{u+v+w}{2}-v=\dfrac{u-v+w}{2}$，$y=\dfrac{u+v-w}{2},\ z=\dfrac{-u+v+w}{2}$ を得るから，

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\det\begin{bmatrix}1/2&-1/2&1/2\\1/2&1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\det\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\det\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
K_1&=\frac{1}{2}\int_0^1du\int_0^1dv\int_0^1(u-v+w)(u+v-w)(-u+v+w)\,dw\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1du\int_0^1dv\int_0^1\{-u^3+u^2v+uv^2-v^3+(u^2-2uv+v^2)w+(u+v)w^2-w^3\}\,dw\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1du\int_0^1\left(-u^3+u^2v+uv^2-v^3+\frac{u^2}{2}-uv+\frac{v^2}{2}+\frac{u}{3}+\frac{v}{3}-\frac{1}{4}\right)dv\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(-u^3+\frac{u^2}{2}+\frac{u}{3}-\frac{1}{4}+\frac{u^2}{2}-\frac{u}{2}+\frac{1}{6}+\frac{u}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)du\\
&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)=\boxed{0}.
\end{aligned}$$

(2) $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ とおくと，

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi&r\cos\theta\cos\varphi&-r\sin\theta\sin\varphi\\\sin\theta\sin\varphi&r\cos\theta\sin\varphi&r\sin\theta\cos\varphi\\\cos\theta&-r\sin\theta&0\end{bmatrix}=r^2\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi&\cos\theta\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\theta\sin\varphi&\cos\theta\sin\varphi&\cos\varphi\\\cos\theta&-\sin\theta&0\end{bmatrix}=r^2\sin\theta$$

となる．また，(r,θ,φ) は $W=\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\}$ を動く．よって，

$$K_2=\iiint_W\sqrt{1-r^2}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi=\int_0^1r^2\sqrt{1-r^2}\,dr\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=4\pi\int_0^1r^2\sqrt{1-r^2}\,dr$$

となる．ここで，いつものように，$r=\sin t\ (0\leqq t\leqq\pi/2)$ と変換すると，

$$\int_0^1r^2\sqrt{1-r^2}\,dr=\int_0^{\pi/2}(\sin^2t-\sin^4t)\,dt=\left(\frac{1!!}{2!!}-\frac{3!!}{4!!}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}\qquad\therefore K_2=\boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

【別法 1】 $V=\{(x,y,z)\mid -1\leqq x\leqq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2},\ -\sqrt{1-x^2-y^2}\leqq z\leqq\sqrt{1-x^2-y^2}\}$ と表すと，

$$\begin{aligned}
K_2&=2^3\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dz=2\pi\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)\,dy\\
&=2\pi\int_0^1\left[(1-x^2)y-\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{4\pi}{3}\int_0^1(1-x^2)^{3/2}\,dx=\frac{4\pi}{3}\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi^2}{4}}.
\end{aligned}$$

【別法 2】 $\boxed{2}$ (3) のように，$V=\{(x,y,z)\mid -\sqrt{1-x^2-y^2}\leqq z\leqq \sqrt{1-x^2-y^2},\,(x,y)\in D\}$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$ と見なすと，

$$K_2=2\iint_D dxdy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,dz=\frac{\pi}{2}\iint_D (1-x^2-y^2)\,dxdy$$

と表される．そこで，$x=r\cos\theta,\,y=r\sin\theta$ とおくと，(r,θ) は $0\leqq r\leqq 1,\,0\leqq\theta\leqq 2\pi$ を動くので，

$$K_2=\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)r\,dr=\pi^2\left[-\frac{(1-r^2)^2}{4}\right]_0^1=\boxed{\frac{\pi^2}{4}}.$$

(3) (2) と同様に，$x=r\sin\theta\cos\varphi,\,y=r\sin\theta\sin\varphi,\,z=r\cos\theta$ とおくと，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$ であった．また，(r,θ,φ) は $W=\{(r,\theta,\varphi)\mid a\leqq r\leqq b,\,0\leqq\theta\leqq\pi,\,0\leqq\varphi\leqq 2\pi\}$ を動く．よって，

$$K_3=\iiint_W\frac{1}{r^p}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi=\left(\int_a^b\frac{dr}{r^{p-2}}\right)\left(\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)$$
$$=\begin{cases}\boxed{\dfrac{4\pi}{p-3}\left(\dfrac{1}{a^{p-3}}-\dfrac{1}{b^{p-3}}\right)\quad (p\neq 3\text{ のとき})},\\ \boxed{4\pi\log\dfrac{b}{a}\quad (p=3\text{ のとき})}.\end{cases}$$

$\boxed{6}$ 空間図形の体積を求める問題

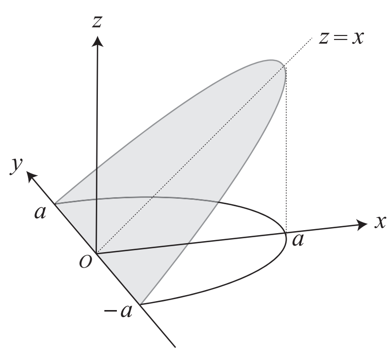

図 1 (1) の図形

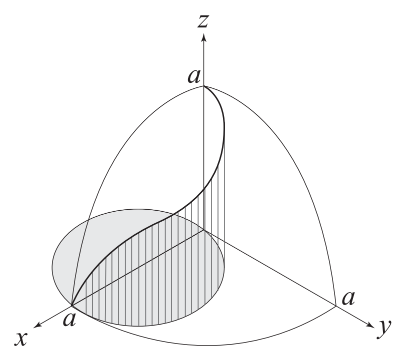

図 2 (2) の図形

(1) 求める体積を V_1 とおく．さらに，

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq a^2,\,x\geqq 0\},\quad V=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\,0\leqq z\leqq x\}$$

とおく．すると，

$$V_1=\iiint_V dxdydz=\iint_D dxdy\int_0^x dz=\iint_D x\,dxdy=\int_0^a dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\cdot r\,dr$$
$$=\int_0^a r^2\,dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\frac{a^3}{3}\cdot 2=\boxed{\frac{2}{3}a^3}.$$

(2) 求める体積を V_2 とおく．$x\geqq 0,\,y\geqq 0,\,z\geqq 0$ の部分を求めて 4 倍する．$x^2+y^2\leqq ax\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{1}{2}a\right)^2+y^2\leqq\dfrac{a^2}{4}$ に注意して，

$$D=\left\{(x,y)\mid\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+y^2\leqq\frac{a^2}{4},\,x\geqq 0,\,y\geqq 0\right\},$$
$$V=\left\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D,\,0\leqq z\leqq\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right\},$$

とおく．すると，

$$\frac{V_2}{4} = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dxdy$$

となる．さらに，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とすると $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ であり，(r,θ) は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq r \leqq a\cos\theta$ を動くので，

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{d}{dr}\left\{\frac{(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{-3}\right\} dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)\, d\theta \\ &= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{V_2 = \dfrac{4a^3}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)}$．