数学演習第二（演習第 13 回）

線形：行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化

2022 年 1 月 26 日 実施

- 小テストの問題は $\boxed{1}$ の 4 問です．レポート課題は $\boxed{2}$ の 4 問です．
- それ以外の問題は自習用問題です（こちらも是非解いてください）．
- レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いてください．

【要点】

〈正方行列の固有値と固有ベクトル〉 (線形教科書 p. 87–88)

複素数 λ が n 次の複素数成分の正方行列 A の**固有値** (eigenvalue) であるとは，零ベクトル $\mathbf{0}$ でない，n 次のある列ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，等式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたすときをいう．このとき，列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を λ に対する A の**固有ベクトル** (eigenvector) であるという．A の固有値は，λ の n 次方程式 $\det(\lambda E_n - A) = 0$ の解と一致するので，この方程式を解けばよい．また，λ に対する A の固有ベクトルは，同次連立 1 次方程式 $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の非自明な解 $\boldsymbol{x}$ であるから，係数行列 $\lambda E_n - A$ を簡約化すればよい．
例えば，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して，$\det(\lambda E_2 - A) = (\lambda - 1)^2 + 1$ より，$\lambda = 1 \pm i$ が A のすべての固有値である．そして，$(1+i)E_2 - A = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ から，$1+i$ に対する A の固有ベクトルの 1 つは $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ である．また，同様にして，$1-i$ に対する A の固有ベクトルの 1 つは $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ であることがわかる．

〈線形変換の固有値と固有ベクトル〉 (線形教科書 p. 167–168)

V を任意のベクトル空間とする．複素数 λ が線形変換 $f\colon V \to V$ の**固有値** (eigenvalue) であるとは，零ベクトル $\mathbf{0}$ でない，あるベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が存在して，等式 $f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ をみたすときをいう．このとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を λ に対する f の**固有ベクトル** (eigenvector) であるという．V が有限次元のとき，V の基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列を A とすると，f の固有値は A の固有値である．よって，A の固有値を求めればよい．また，V の基底 $\mathcal{A}$ は何でもよいので，表現行列を**標準行列** (p. 156) として固有値を求めてもよい．

〈正方行列と線形変換の対角化可能性〉 (線形教科書 p. 91,169)

n 次の正方行列 A が**対角化可能** (diagonalizable) であるとは，ある正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ が対角行列にできるときをいう．その必要十分条件は，n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ が存在することで，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ の固有値をそれぞれ $\mu_1, \cdots, \mu_n$ とすると，$P = [\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n]$ にとれ，対角行列 $P^{-1}AP$ の対角成分はそれぞれ $\mu_1, \cdots, \mu_n$ になる (p. 92)．ここで，$\mu_1, \cdots, \mu_n$ が異なっている必要はない．例えば，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して，固有ベクトル $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ は 1 次独立で，$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$ である．P^{-1} を計算する必要はない．V の線形変換 f が**対角化可能**であるとは，f の基底 $\mathcal{A}$ に関する表現行列 A が対角化可能になる，V の基底 $\mathcal{A}$ が存在するときをいう．

【小テスト：オンライン受験】

$\boxed{1}$ 正方行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -3 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を（ア）～（エ）から<u>すべて選べ</u>.

（ア） -2　（イ） -1　（ウ） 1　（エ） 2

(2) A の最小固有値（固有値のうち最も小さいもの）に対する固有空間の次元を（ア）～（エ）から選べ.

（ア） 1　（イ） 2　（ウ） 3　（エ） 4

【注】B を n 次正方行列とし，λ を B の固有値とする．このとき，$V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid B\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ を λ に対する B の固有空間という．

(3) A の最大固有値（固有値のうち最も大きいもの）に対する固有空間の次元を（ア）～（エ）から選べ.

（ア） 1　（イ） 2　（ウ） 3　（エ） 4

(4)（ア）～（エ）から正しいものを<u>すべて選べ</u>.

（ア） A のすべての固有空間の次元の和は 3 である．
（イ） A のすべての固有空間の次元の和は 4 である．
（ウ） A は対角化可能である．
（エ） A は対角化可能でない．

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ 正方行列 A を次で定める．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

このとき，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定義される線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ について，以下の問いに答えよ．

(1) f の固有値をすべて求めよ．

(2) f の最大固有値 μ に対する固有空間 $V_\mu = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \mu\boldsymbol{x}\}$ の次元を求めよ．

(3) f の表現行列が $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ $(\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3)$ となるような $\mathbb{R}^3$ の基底として次の形のものが取れる．

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

a，b，c を求めよ．

(4) f を n 回合成した関数を f^n とする．すなわち，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$f^1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad f^n(\boldsymbol{x}) = f(f^{n-1}(\boldsymbol{x})) \quad (n \geq 2)$$

と定める．このとき，$f^n(\boldsymbol{e}_1)$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．

【自習用問題】

$\boxed{3}$ 正方行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 12 & -7 & 6 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) A の固有多項式 $F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を計算し, A の固有値を求めよ.

(2) A の各固有値 λ に対して, A の固有空間 $V_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$ の基底（すなわち，同次連立 1 次方程式 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = 0$ の基本解）を求めよ.

(3) A を対角化せよ（すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ）．ここで，P^{-1} の計算は必要ないことに注意（対角化の手順については線形教科書 p.93 参照）.

$\boxed{4}$ 次の正方行列 A について下の問いに答えよ.

$$\text{(a)}\ A = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\ A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\ A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有多項式 $F_A(\lambda)$ および固有値を求めよ.

(2) A の各固有値 λ に対して，固有空間 V_λ の基底を求めよ.

(3) A が対角化可能かどうかを調べ，対角化可能ならば A を対角化せよ（$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ).

$\boxed{5}$ $\boxed{3}$ の A, P に対して次の問いの答えよ.

(1) P^{-1}，A^n を計算せよ.

(2) A の転置行列 ${}^tA$ を対角化せよ.

(3) $\boldsymbol{c}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}_n = A\boldsymbol{c}_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定まるベクトル列 $\{\boldsymbol{c}_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項を求めよ.

(4) ベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ に対する微分方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ の一般解を求めよ.（ヒント：$\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t)$ とおいて，$\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式に書き換える.）

$\boxed{6}$ A が実数成分の n 次正方行列のとき，$\mathbb{R}^n$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$ が対角化可能（$\mathbb{R}^n$ の基底を適当に選べば表現行列が対角行列になる）であるための条件を調べる．$\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ に関する f の表現行列が対角行列 $D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_n \end{bmatrix}$ $(\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R})$ となると仮定して，以下の問いに答えよ.

(1) 表現行列の定義に即して，各 i $(1 \leq i \leq n)$ について，μ_i は A の固有値（$= f$ の固有値)，$\boldsymbol{p}_i$ は μ_i に対する固有ベクトルとなることを示せ.

(2) $P = [\,\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n\,]$ （$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を並べてできる n 次正方行列）とおくとき，$P^{-1}AP = D$ が成り立つことを示せ.

(3) A の固有多項式（$= f$ の固有多項式）$F_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を求めよ.（結果として，各 μ_i は固有方

程式 $F_A(\lambda)=0$ の解であることが分かる.）

(4) $\mu \in \mathbb{R}$ を A の任意の固有値とする．このとき, μ は $\mu_1,\ldots,\mu_n$ のいずれかと一致し, 固有方程式 $F_A(\lambda)=0$ の解としての μ の重複度 (固有値 μ の重複度と呼ぶ) と, μ に対する A の固有空間 ($=f$ の固有空間) $V_\mu=\{x\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x}=\mu\boldsymbol{x}\}$ の次元が等しくなることを示せ.

【注意】 上の問題は「線形教科書の定理 13.7 の必要性の証明」に対応している．命題 13.6 と併せて，$\mathbb{R}^n$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$（あるいは行列 A）が対角化可能であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである:

- 固有方程式 $F_A(\lambda)=\det(\lambda E-A)=0$ の解（$=A$ の固有値）がすべて実数.
- A の各固有値 μ に対して,（固有値 μ の重複度）=（固有空間 V_μ の次元）.

上の議論を逆に辿れば対角化の手順が了解される（線形教科書 p.93 参照）.