数学演習第二（演習第 13 回）

線形：行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化

2022 年 1 月 26 日 実施分

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$

(1) $|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -5 & -2 \\ 3 & \lambda+4 & 3 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$ なので, A の固有値は $\lambda = -1, 2$. よって，答えは **（イ）** と **（エ）**.

(2) A の最小固有値は $\lambda = -1$．このとき，$\lambda E_3 - A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる．よって，$\lambda = -1$ に対する A の固有空間は $\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ となり 1 次元．以上より，答えは **（ア）**.

(3) A の最大固有値は $\lambda = 2$．このとき，$\lambda E_3 - A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる．よって，$\lambda = 2$ に対する A の固有空間は $\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となり 1 次元．以上より，答えは **（ア）**.

(4) A のすべての固有空間の次元の和は 2 となり，A は対角化可能でない．よって，答えは **（エ）**．

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$

(1) A の固有値を求めればよい．$|\lambda E_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -2 \\ 2 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$ なので，f の固有値は $\boxed{\lambda = 1, 3}$.

(2) f の最大固有値は $\mu = 3$．V_3 の基底を求める．そのためには，$f(\boldsymbol{x}) = \mu\boldsymbol{x}$ を解けばよい．$f(\boldsymbol{x}) = \mu\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (\mu E_3 - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので, 最後の方程式を解く．$\mu E_3 - A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので，$\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が V_3 の基底となる．よって，$\boxed{\dim V_3 = 2}$.

(3) まず，固有値 $\lambda = 1$ に対する f の固有空間 V_1 の基底を求める．$\lambda E_3 - A = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので，$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ が V_1 の基底となる．よって，$\mathbb{R}^3$ の基底として，

$$\mathcal{B} = \left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

を選ぶと，f の表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ となる $\cdots$ $(*)$．以上より，$\boxed{a = -1,\ b = -2,\ c = -1}$．

問題文の条件 $1 = \lambda_1 \leq \lambda_2 = 3$ から，$a = -2, b = -1$ ではないことに注意しておく．

以下，$(*)$ をチェックする．標準基底 $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ に関する f の表現行列は A となる．また，

$$\big(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\big) = \big(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\big) \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

なので，$\mathcal{E}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列は $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．よって，$\mathcal{B}$ に関する f の表現行列は $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ となる．

(4) $f^n(\boldsymbol{x}) = A^n \boldsymbol{x}$ なので，まず A^n を求める．$B = P^{-1}AP$ とおくと，$B^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}$ なので，

$$\begin{aligned} A^n = PB^nP^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 + 2 \cdot 3^n & -2 + 2 \cdot 3^n & -1 + 3^n \\ 1 - 3^n & 2 - 3^n & 1 - 3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{f^n(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 + 2 \cdot 3^n \\ 1 - 3^n \\ 0 \end{bmatrix}}$．

【自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$

(1) $F_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & -2\\ -12 & \lambda+7 & -6\\ -8 & 4 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. よって，$A$ の固有値は $\lambda=-1,1$.

(2) まず，$\lambda=-1$ の場合を考える．$-E-A=\begin{bmatrix}-4 & 2 & -2\\ -12 & 6 & -6\\ -8 & 4 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行基本変形}]{}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ なので，V_{-1} の基底として，$\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}\right)$ を取ることができる．次に，$\lambda=1$ の場合を考える．$E-A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -2\\ -12 & 8 & -6\\ -8 & 4 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行基本変形}]{}\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ なので，V_1 の基底として，$\left(\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right)$ を取ることができる．

(3) $P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$ とおいて，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ を得る．

$\boxed{4}$

$\boxed{\text{(a) について}}$

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-8 & 9\\ -6 & \lambda+7\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)$. A の固有値は $\lambda=-1,2$.

(2) $\underline{\lambda=-1\text{ に対して}}$: $-E-A=\begin{bmatrix}-9 & 9\\ -6 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より，V_{-1} の基底は $\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$.

$\underline{\lambda=2\text{ に対して}}$: $2E-A=\begin{bmatrix}-6 & 9\\ -6 & 9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3/2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ より，V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right)$.

(3) $P=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{(b) について}}$

(1) $F_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 1 & -5\\ -1 & \lambda-2 & -3\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$. A の固有値は $\lambda=1,2,3$.

(2) $\underline{\lambda=1\text{ に対して}}$: $E-A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -5\\ -1 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より，V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$.

$\underline{\lambda = 2 \text{ に対して}}$: $2E - A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

$\underline{\lambda = 3 \text{ に対して}}$: $3E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -1 \\ 4 & \lambda-5 & -2 \\ -4 & 4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3$. A の固有値は $\lambda = 1$.

(2) $\underline{\lambda = 1 \text{ に対して}}$: $E - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $\dim V_1 = 2 < 3$ であるから対角化できない.

5

(1) $P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3/2 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. $B = P^{-1}AP$ とおくと，$B = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．一方，

$$B^n = (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP$$

なので，$A^n = PB^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -(-1)^n+2 & (-1)^n-1 & -(-1)^n+1 \\ -6(-1)^n+6 & 4(-1)^n-3 & -3(-1)^n+3 \\ 4-4(-1)^n & -2+2(-1)^n & -(-1)^n+2 \end{bmatrix}$.

(2) $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の両辺の転置を取って，${}^t(P^{-1}AP) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$．ここで，$Q = ({}^tP)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば，$Q^{-1}\,{}^tAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる．これより，${}^tA$ の固有値も $-1, 1$ であり，V_{-1} の基底が $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right)$，$V_1$ の基底が $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ となる.

(3) $\boldsymbol{c}_n = A^n \boldsymbol{c}_0 = \begin{bmatrix} -(-1)^n+2 & (-1)^n-1 & -(-1)^n+1 \\ -6(-1)^n+6 & 4(-1)^n-3 & -3(-1)^n+3 \\ 4-4(-1)^n & -2+2(-1)^n & -(-1)^n+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3(-1)^n+3 \\ 2-3(-1)^n \end{bmatrix}$.

(4) $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t)$ を $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ に代入すると，$P\boldsymbol{y}'(t) = AP\boldsymbol{y}(t)$ なので，$\boldsymbol{y}'(t) = P^{-1}AP\boldsymbol{y}(t)$．よって，$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{-t} \\ C_3e^{t} \end{bmatrix}$ となり，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{-t} \\ C_3e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1-C_2)e^{-t}+C_3e^t \\ 2C_1e^{-t}+3C_3e^t \\ 2C_2e^{-t}+2C_3e^t \end{bmatrix}$.

$\boxed{6}$

(1) $(A\boldsymbol{p}_1, \ldots, A\boldsymbol{p}_n) = (f(\boldsymbol{p}_1), \ldots, f(\boldsymbol{p}_n)) = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)\,D = (\mu_1\boldsymbol{p}_1, \ldots, \mu_n\boldsymbol{p}_n)$（2 番目の等号で表現行列の定義を用いた）より，$A\boldsymbol{p}_i = \mu_i\boldsymbol{p}_i$ $(1 \leq i \leq n)$．$\boldsymbol{p}_i \neq 0$ であるから, μ_i は A の固有値であり，$\boldsymbol{p}_i$ は μ_i に対する固有ベクトルである.

(2) (1) の結果から, $AP = A\,[\,\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n\,] = [\,A\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ A\boldsymbol{p}_n\,] = [\,\mu_1\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \mu_n\boldsymbol{p}_n\,] = [\,\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n\,]\,D = PD$．$\mathcal{B} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ が R^n の基底であるから $P = [\,\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n\,]$ は正則行列となる．よって，$AP = PD$ から $P^{-1}AP = D$ が従う.

(3) $A = PDP^{-1}$ と書けるから，$F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = |P(\lambda E - D)P^{-1}| = |P| \begin{vmatrix} \lambda-\mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda-\mu_n \end{vmatrix} P^{-1} = (\lambda-\mu_1)\cdots(\lambda-\mu_n)$．ここで，$|P||P^{-1}| = |PP^{-1}| = |E| = 1$ を用いた.

(4) $A = PDP^{-1}$ より $A\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x} \ \Leftrightarrow \ (\mu E - D)P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mu-\mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu-\mu_n \end{bmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x} = 0$ であるから，μ は $\mu_1, \ldots, \mu_n$ のいずれかと一致する．$\mu_i = \mu$ となる i を $i_1, \ldots, i_s$ (s が固有値 μ の重複度) とすれば，$\boldsymbol{x} \in V_\mu \ \Leftrightarrow \ P^{-1}\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_s} \rangle \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{p}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{i_s} \rangle$．よって, $V_\mu = \langle \boldsymbol{p}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{i_s} \rangle$ となり，$s = \dim V_\mu$ が示された.