数学演習第二・中間統一試験【解説】 (2021 年 12 月 8 日実施)

1

(1) $f_x(x,y) = \boxed{3x^2-3y}$.

(2) $f_{xy}(x,y) = \boxed{-3}$.

(3) $f_x(2,3)=3$, $f_y(x,y)=-3x+6y$, 特に $f_y(2,3)=12$ より，
求める接平面の方程式は $z-17=3(x-2)+12(y-3)$ であるので
まとめると $\boxed{z=3x+12y-25}$.

(4) 極値をとる点の座標を (a,b) とすると $0=f_y(a,b)=-3(a-2b)$ より，$a=2b$.
これより $0=f_x(a,b)=f_x(2b,b)=3b(4b-1)$ であるので
$f(x,y)$ の停留点は $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ に限られる.
また，$f_{xx}(x,y)=6x$, $f_{yy}(x,y)=6$, $f_{xy}(x,y)=-3$ より，
$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-\{f_{xy}(x,y)\}^2$ とおくと，$D(x,y)=9(4x-1)$.
ここで $D(0,0)=-9<0$ であるので，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で極値をとらない.
一方，$D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=9>0$ であるので，$f(x,y)$ は点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ で極値をとる.
さらに $f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=3>0$ かつ $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{16}$ より $\boxed{f(x,y) \text{ は点 } \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) \text{ で極小値 } -\frac{1}{16} \text{ をとる}}$.

2

(5) $x'(t)=3t^2+2$，$y'(t)=6t+2$ であるので $x'(0)=2$，$y'(0)=2$.
また $x(0)=\pi$，$y(0)=\frac{\pi}{2}$ であり，
$f_x(x,y)=\dfrac{3\cos(3x)}{\sin(3x)+\cos(y)+1}$ であるので $f_x(x(0),y(0))=f_x\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)=-3$.
一方 $f_y(x,y)=-\dfrac{\sin(y)}{\sin(3x)+\cos(y)+1}$ より $f_y(x(0),y(0))=f_y\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)=-1$.
よって $z'(0)=f_x(x(0),y(0))x'(0)+f_y(x(0),y(0))y'(0)=\boxed{-8}$.

3

(6) $\varphi_u(u,v)=9u^2$，$\psi_u(u,v)=2v$ であるので $\varphi_u(-1,0)=9$，$\psi_u(-1,0)=0$.
また $\varphi(-1,0)=0$，$\psi(-1,0)=5$ であり，
$f_x(x,y)=\dfrac{e^x}{1+(e^x+y)^2}$ であるので $f_x(\varphi(-1,0),\psi(-1,0))=f_x(0,5)=\dfrac{1}{37}$.
一方 $f_y(x,y)=\dfrac{1}{1+(e^x+y)^2}$ より $f_y(\varphi(-1,0),\psi(-1,0))=f_y(0,5)=\dfrac{1}{37}$ であるので

$$g_u(-1,0)=f_x(\varphi(-1,0),\psi(-1,0))\,\varphi_u(-1,0)+f_y(\varphi(-1,0),\psi(-1,0))\,\psi_u(-1,0)=\boxed{\frac{9}{37}}.$$

4

(7) $\dfrac{1}{1+xy}=1-xy+o(r^2)$ であるので

$$f(x,y)=\frac{1+x+y}{1+xy}=\boxed{1-xy+x+y}+o(r^2).$$

(8) $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2}x^2+o(r^2)$,　　$\sin(x+y)=x+y+o(r^2)$ であるので

$$f(x,y)=\sqrt{1+x}\sin(x+y)=x+y+\frac{1}{2}x(x+y)+o(r^2)=\boxed{x+y+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}xy}+o(r^2).$$

(9) $\cos(2x+y)=1-\frac{1}{2}(2x+y)^2+o(r^2)$ であるので

$$f(x,y)=\log\left(1-\frac{1}{2}(2x+y)^2+o(r^2)\right)=\boxed{-2x^2-2xy-\frac{1}{2}y^2}+o(r^2).$$

$\boxed{5}$ (10) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと

$$\frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^n}=\frac{r^5(\cos^5\theta-4\cos^3\theta\sin^2\theta+3\cos\theta\sin^4\theta-2\sin^5\theta)}{r^{2n}}$$ であるので

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^n}$ は $n=1,2$ のとき収束.

また $n\geq 3$ のとき例えば $\theta=0$ とすると発散する.

よって求める正の整数 n は $\boxed{\text{n=1,2}}$.

$\boxed{6}$ (11) 求める三角形の面積は $\dfrac{1}{2}||\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}||=\dfrac{1}{2}\left|\left|\begin{bmatrix}7\\-3\\-2\end{bmatrix}\right|\right|=\boxed{\dfrac{1}{2}\sqrt{62}}$.

(12) 求める接平面は $2(x-1)+4(y-3)+(z-5)=0$ であるので

まとめて $\boxed{2x+4y+z=19}$.

(13) 点 X_1 の座標を (x_1,y_1,z_1) とすると

点 X_1 は平面 H 上にあることより $z_1=19-2x_1-4y_1$ であるので

$$\overrightarrow{X_0X_1}=\begin{bmatrix}x_1-1\\y_1-3\\z_1-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-1\\y_1-3\\19-2x_1-4y_1-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-1\\y_1-3\\14-2x_1-4y_1\end{bmatrix}.$$

ここで $\overrightarrow{X_0X_1}$ は $\overrightarrow{OB}$ と直交するので

$0=\overrightarrow{X_0X_1}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1-1)+(y_1-3)+2\cdot(14-2x_1-4y_1)=-3x_1-7y_1+24.$

また $\overrightarrow{X_0X_1}$ の $\overrightarrow{OC}$ 方向への正射影は $\begin{bmatrix}6\\6\\2\end{bmatrix}$ であることより

$$\begin{bmatrix}6\\6\\2\end{bmatrix}=\frac{\overrightarrow{X_0X_1}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left|\left|\overrightarrow{OC}\right|\right|^2}\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}=\frac{x_1-y_1+2}{19}\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$$ であるので $\dfrac{x_1-y_1+2}{19}=2.$

以上より連立一次方程式 $\begin{cases}0=-3x_1-7y_1+24\\ \dfrac{x_1-y_1+2}{19}=2\end{cases}$ を解くことにより

求める座標 x_1 は $\boxed{x_1=\dfrac{138}{5}}$.

$\boxed{7}$ (14) $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}3\\3\\4\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}2\\4\\4\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}2\\3\\5\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}-4\\2\\-8\\k\end{bmatrix}$ とおくと,

求める条件を満たすには $rank[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4]=3$ となればよい.

$\begin{bmatrix}3&2&2&-4\\3&4&3&2\\4&4&5&-8\\4&3&3&k\end{bmatrix}$ を簡約化すると $\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&5\\0&0&1&-4\\0&0&0&k+5\end{bmatrix}$ であるので

求める k の条件は $\boxed{k=-5}$.

(15) $dim(W_1)=2,\ dim(W_2)=2$ であり (14) より $dim(W_1+W_2)=3$ であるので

次元公式より $dim(W_1\cap W_2)=1$ である.

また $k=-5$ であるとき $\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&5\\0&0&1&-4\\0&0&0&k+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&5\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ であるので

$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$ の間に成り立つ非自明な一次関係式は $2\boldsymbol{v}_1-5\boldsymbol{v}_2+4\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{0}$

さらに $2\boldsymbol{v}_1-5\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-4\\-14\\-12\\-7\end{bmatrix}$ であるので求める基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix}-4\\-14\\-12\\-7\end{bmatrix}\right)}$.

$\boxed{8}$ (16) 求める条件を満たすには $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が一次独立であればよいので

$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たす x_1, x_2, x_3 が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ のみであればよい.

$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると

$$\boldsymbol{0} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

ここで $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次元独立なので $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}.$

つまり求める条件を満たすには $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & k \end{bmatrix}$ の階数が 3 であればよい.

ここで $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & k-2 \end{bmatrix}$ であるので

求める条件は $\boxed{k \neq 0}$.

(17) $$[\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3]\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix} 25 & 18 & 8 \\ 16 & 13 & 5 \\ 53 & 38 & 17 \end{bmatrix}.$$

よって求める座標は $\boxed{\begin{bmatrix} 25 \\ 16 \\ 53 \end{bmatrix}}$.

(18) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ であり $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 11 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 29 & -2 & -13 \\ -9 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であるので

$$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3]\begin{bmatrix} 29 & -2 & -13 \\ -9 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3].$$

よって求める座標は $\boxed{\begin{bmatrix} 29 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{9}$ (19) $dimN(A) = 4 - rankA$ であり

A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & k-28 \end{bmatrix}$ であるので

求める条件は $\boxed{k = 28}$.

(20) $k = 28$ であるとき A を簡約化した行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるので

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解は $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

よって求める基底は $\boxed{\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$.