2021年度 数学演習第二 中間統一試験 問題用紙　2021.12. 8 実施 (90 分)

・解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと.
・簡潔な解答になるよう努めること. 不十分と判断された解答には得点を与えないことがある.

1　$f(x,y) = x^3 - 3xy + 3y^2$ とする.

(1) 1階偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ.

(2) 2階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ.

(3) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(2,3,17)$ における接平面の方程式を求めよ.

(4) $f(x,y)$ が極値をとる点の座標とその極値を求めよ. (極大値か極小値かを明記すること.)

2 $f(x,y) = \log_e(1 + \sin(3x) + \cos(y))$ とする.

(5) $x(t) = t^3 + 2t + \pi, y(t) = 3t^2 + 2t + \dfrac{\pi}{2}$ とし, 合成関数 $z(t) = f(x(t), y(t))$ を考える. $z(t)$ の導関数 $z'(t)$ に対して, $z'(0)$ の値を求めよ.

3　$f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}(e^x + y)$ とする.

(6) $\varphi(u,v) = 3u^3 + v^2 + 3,\ \psi(u,v) = 2uv + 5$ とし, 合成関数 $g(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ を考える. $g(u,v)$ の偏導関数 $g_u(u,v)$ に対して, $g_u(-1,0)$ の値を求めよ.

4 次の $f(x,y)$ の $(0,0)$ における2次の項までのマクローリン展開

$$f(x,y) = \underline{a_{00} + a_{10}\,x + a_{01}\,y + a_{20}\,x^2 + a_{11}\,xy + a_{02}\,y^2} + o(r^2) \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0)$$

を求め, 下線部に相当する部分のみを解答欄に記入せよ.

(7) $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{1+xy}$.

(8) $f(x,y) = \sqrt{1+x}\,\sin(x+y)$.

(9) $f(x,y) = \log_e(\cos(2x+y))$.

5 $f(x,y) = x^5 - 4x^3y^2 + 3xy^4 - 2y^5$ とする.

(10) 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^n}$ が有限値として存在するような正の整数 n をすべて求めよ.

$\boxed{\mathbf{6}}$　4点 $\mathrm{X_0}(1,3,5)$，$\mathrm{A}(2,4,1)$，$\mathrm{B}(1,1,2)$，$\mathrm{C}(3,3,1)$ を考える．

(11)　3角形 OAB の面積を求めよ．

(12)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を法線ベクトルとし，点 $\mathrm{X_0}$ を通る平面 H の方程式を求めよ．

(13)　平面 H 上の点 $\mathrm{X_1}$ を考える．$\overrightarrow{\mathrm{X_0X_1}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に直交し，$\overrightarrow{\mathrm{X_0X_1}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 方向への正射影は $\begin{bmatrix}6\\6\\2\end{bmatrix}$ とする．このとき点 $\mathrm{X_1}$ の x 座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$　$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}3\\3\\4\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\4\\3\end{bmatrix} \right\rangle$，　$W_2 = \left\langle \begin{bmatrix}2\\3\\5\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\2\\-8\\k\end{bmatrix} \right\rangle$ を考える．

(14) $\dim(W_1+W_2)=3$ となるための実数 k の条件を求めよ．

(15) 実数 k が (14) で求めた条件を満たすとき，$W_1 \cap W_2$ の基底を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$　$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ とする．また $\mathbb{R}^3$ の基底を $\mathcal{V} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ とし，
$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の $\mathcal{V}$ に関する座標を $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{a}_2]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{a}_3]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix}1\\1\\k\end{bmatrix}$ とする．
さらに $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ の $\mathcal{V}$ に関する座標を $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix}5\\1\\11\end{bmatrix}$，
$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{C} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$ の $\mathcal{B}$ に関する座標を $[\boldsymbol{c}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{c}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{c}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ とする．

(16) $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が $\mathbb{R}^3$ の基底となるための実数 k の条件を求めよ．

(17) $\boldsymbol{c}_1$ の $\mathcal{V}$ に関する座標を求めよ．

(18) $\boldsymbol{v}_1$ の $\mathcal{B}$ に関する座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 行列 $A = \begin{bmatrix}3&2&2&9\\2&1&1&3\\3&4&3&23\\4&4&5&k\end{bmatrix}$ を考える．

(19) $\dim N(A) = 1$ となるための実数 k の条件を求めよ．

(20) 実数 k が (19) で求めた条件を満たすとき，$N(A)$ の基底を求めよ．