数学演習第二・期末統一試験【解説】 (2022 年 2 月 2 日実施)

$\boxed{1}$ (1) $g(x,y)=0 \Leftrightarrow (1+x^2)y^2-6x^2y+x^4=0 \Leftrightarrow y^2-\dfrac{6x^2y}{1+x^2}+\dfrac{x^4}{1+x^2}=0$ なので，

$$\left(y-\frac{3x^2}{1+x^2}\right)^2=\left(\frac{3x^2}{1+x^2}\right)^2-\frac{x^4}{1+x^2}=\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2(8-x^2)$$

となる．よって，$y=\dfrac{3x^2}{1+x^2}\pm\dfrac{x^2\sqrt{8-x^2}}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}\cdot\dfrac{9-(8-x^2)}{3\mp\sqrt{8-x^2}}=\dfrac{x^2}{3\mp\sqrt{8-x^2}}$ を得る．

$x=2$ のとき $y=4/5$ となるので，$\varphi(x)=\boxed{\dfrac{x^2}{3+\sqrt{8-x^2}}}$ $(-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2})$.

【注】$\psi(x)=\dfrac{x^2}{3-\sqrt{8-x^2}}$ $(-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2})$ となる．

(2) (1) より $\varphi'(x)=\dfrac{2x}{3+\sqrt{8-x^2}}+\dfrac{x^3}{\sqrt{8-x^2}(3+\sqrt{8-x^2})^2}$ となる．これより，$\varphi'(2)=\dfrac{24}{25}$. よって，点 $(2,4/5)$ における接線の方程式は，$y=\dfrac{24}{25}(x-2)+\dfrac{4}{5}=\boxed{\dfrac{24}{25}x-\dfrac{28}{25}}$.

(3) $g(x,\psi(x))=0$ の両辺を x で微分して，$g_x(x,\psi(x))+g_y(x,\psi(x))\psi'(x)=0\ \cdots$（ア）を得る．$g_x(x,y)=4x^3+2xy^2-12xy$，$g_y(x,y)=2x^2y-6x^2+2y$ なので，

$$g_x(2,\psi(2))=g_x(2,4)=0,\quad g_y(2,\psi(2))=g_y(2,4)=16$$

となり，（ア）で $x=2$ として $\psi'(2)=0$ を得る．さらに，（ア）の両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned}&g_{xx}(x,\psi(x))+2g_{xy}(x,\psi(x))\psi'(x)\\&+g_{yy}(x,\psi(x))\{\psi'(x)\}^2+g_y(x,\psi(x))\psi''(x)=0\quad\cdots\quad（イ）\end{aligned}$$

を得る．この式で $x=2$ として，$\psi'(2)=0$ に注意すると，$g_{xx}(2,4)+g_y(2,4)\psi''(2)=0$ となる．$g_{xx}(x,y)=12x^2+2y^2-12y$ なので，$g_{xx}(2,4)=32$ となり，$\psi''(2)=\boxed{-2}$.

(4) (1) より $g(x,y)=0$ のもとでは $y=\varphi(x)$ または $y=\psi(x)$ なので，$f(x,\varphi(x))=\varphi(x)$ および $f(x,\psi(x))=\psi(x)$ の極大値を求めればよい．(2) より $\varphi'(x)=\dfrac{2x}{3+\sqrt{8-x^2}}+\dfrac{x^3}{\sqrt{8-x^2}(3+\sqrt{8-x^2})^2}$ であり，同様にして $\psi'(x)=\dfrac{2x}{3-\sqrt{8-x^2}}-\dfrac{x^3}{\sqrt{8-x^2}(3-\sqrt{8-x^2})^2}$ となる．$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ であり，$\varphi'(x)$ は $x=0$ の近くで符号が負から正に変化するので，$\varphi(x)$ は $x=0$ で極小値を取る．$\psi'(x)=0\Leftrightarrow x=0,\pm 2$. $\varphi(x)$ と同様にして，$\psi(x)$ は $x=0$ で極小値を取る．(3) より $\psi''(2)<0$ なので，$\psi(x)$ は $x=2$ で極大値 $\psi(2)=4$ を取る．（イ）より $g_{xx}(-2,\psi(-2))+g_y(-2,\psi(-2))\psi''(-2)=0$ となる．$g_{xx}(-2,\psi(-2))=32$，$g_y(-2,\psi(-2))=16$ なので，$\psi(-2)=-2$ となる．$\psi''(-2)<0$ なので，$\psi(x)$ は $x=-2$ で極大値 $\psi(-2)=4$ を取る．以上をまとめると，$\boxed{\text{点 }(\pm 2,4)\text{ で極大値 }4\text{ を取る}}$.

$\boxed{2}$ (5) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{-x^2+2}x\,dy=\int_0^1 x(-x^2+2-x)\,dx=\boxed{\frac{5}{12}}$.

(6) 極座標変換により $\displaystyle\iint_D xy\cos(x^2+y^2)\,dxdy \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot\cos r^2\cdot r\,dr$ となる．

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta=\frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} r^3\cos r^2\,dr=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} r^2(\sin r^2)'\,dr \underset{\text{部分積分}}{=} \frac{1}{2}[r^2\sin r^2]_0^{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}2r\sin r^2\,dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}}(\cos r^2)'\,dr=\frac{1}{2}[\cos r^2]_0^{\sqrt{\pi}}=-1.$$

よって，$\displaystyle\iint_D xy\cos(x^2+y^2)\,dxdy=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

(7)

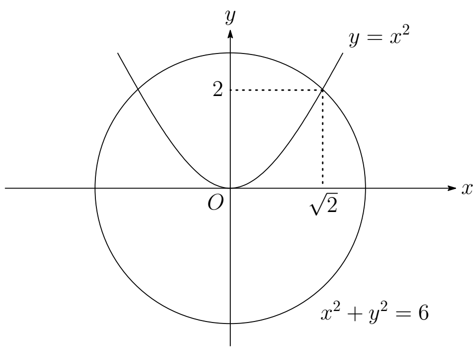
$$\iiint_D \frac{2}{(x+y+z+1)^3}\,dxdydz=\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\int_0^{1-y-z}\frac{2}{(x+y+z+1)^3}\,dx$$

$$=-\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\,[(x+y+z+1)^{-2}]_{x=0}^{1-y-z}=-\int_0^1 dz\int_0^{1-z} dy\,\{2^{-2}-(y+z+1)^{-2}\}$$

$$=-\int_0^1 dz[2^{-2}y+(y+z+1)^{-1}]_{y=0}^{1-z}=-\int_0^1 dz\,\{2^{-2}(1-z)+2^{-1}-(z+1)^{-1}\}$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^1(1-z)\,dz-\frac{1}{2}\int_0^1 dz+\int_0^1\frac{dz}{z+1}=\boxed{\log 2-\frac{5}{8}}.$$

3 (8) 下図において，曲線 $y=x^2$ と曲線 $x^2+y^2=6$ に囲まれた領域のうち，$x\geq 0$ の部分が積分領域となる．



よって，$I=\boxed{\displaystyle\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_2^{\sqrt{6}} dy\int_0^{\sqrt{6-y^2}} f(x,y)\,dx}$.

4 (9) $x=\frac{1}{2}(u+v)$，$y=\frac{1}{2}(u-v)$ なので，$\displaystyle\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=\boxed{-\frac{1}{2}}$.

(10) $\displaystyle J=\int_0^1\int_0^1(u+v)e^{uv}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv=\frac{1}{2}\int_0^1 du\int_0^1 ue^{uv}\,dv+\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_0^1 ve^{uv}\,du$ となる．

$$\frac{1}{2}\int_0^1 du\int_0^1 ue^{uv}\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1 du[e^{uv}]_{v=0}^1=\frac{1}{2}\int_0^1(e^u-1)\,du=\frac{1}{2}[e^u-u]_{u=0}^1=\frac{1}{2}(e-2).$$

同様にして，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_0^1 ve^{uv}\,du=\frac{1}{2}(e-2)$．よって，$J=\boxed{e-2}$.

$\boxed{5}$ (11) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 2a+7 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ -6 & 9 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & -3 & 2a+3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので，$a = -5$ のとき $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Im}\, f = 2$ となる．よって，$a_0 = \boxed{-5}$.

(12) $a \neq a_0$ のとき $\mathrm{rank}\, A = 3$ なので，$\dim \mathrm{Im}\, f = \boxed{3}$.

(13) $a = a_0$ のとき $A \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので，$\mathrm{Im}\, f$ の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$ を選ぶことができる．$\begin{bmatrix} -2 \\ b \\ 3 \\ c \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ となる (x_1, x_2) を求める．第 1 行と第 3 行より，

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

となる．よって，$b = x_1 + 2x_2 = \boxed{7}$，$c = x_1 - 3x_2 = \boxed{-8}$.

$\boxed{6}$ (14) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+10 & -(\alpha+1) & 6 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -18 & 3\alpha & \lambda-11 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$ なので，$\lambda = \boxed{-1, 2}$.

(15) A の最大固有値は 2．$2E - A = \begin{bmatrix} 12 & -(\alpha+1) & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -18 & 3\alpha & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ なので，最大固有値 2 に対する固有空間の基底として $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}$ を選ぶことができる．

(16) $-E - A = \begin{bmatrix} 9 & -(\alpha+1) & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & 3\alpha & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 9 & -(\alpha+1) & 6 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる．これより，$\alpha = 2$ のとき固有値 -1 に対する固有空間の次元が 2 となり，$\alpha \neq 2$ のとき固有値 -1 に対する固有空間の次元が 1 となる．よって，$\boxed{\alpha = 2}$.

(17) $\alpha = 2$ とする．このとき，$-E - A \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる．よって，固有値 -1 に対する固有空間の基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ を選ぶことができる．$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ となる．この両辺を n 乗して，$P^{-1}A^nP = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$ となり，

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 4\cdot(-1)^n - 3\cdot 2^n & -(-1)^n + 2^n & 2\cdot(-1)^n - 2\cdot 2^n \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ -6\cdot(-1)^n + 6\cdot 2^n & 2\cdot(-1)^n - 2\cdot 2^n & -3\cdot(-1)^n + 4\cdot 2^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって，A^n の $(1,2)$ 成分は $\boxed{-(-1)^n + 2^n}$.

$\boxed{7}$ (18) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \boxed{(x_1 + 2x_2 - x_3)}\,\boldsymbol{w}_1 + \boxed{(x_1 - x_2 + 2x_3)}\,\boldsymbol{w}_2$.

(19) (18) より $f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$，$f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2$，$f(\boldsymbol{e}_3) = -\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2$ となる．よって，

$$\begin{aligned}\big(f(\boldsymbol{e}_1),\quad f(\boldsymbol{e}_2),\quad f(\boldsymbol{e}_3)\big) &= \big(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2,\quad 2\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2,\quad -\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2\big) \\ &= \big(\boldsymbol{w}_1,\quad \boldsymbol{w}_2\big)\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}.\end{aligned}$$

(20) $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}_1$ に関する g の表現行列 A は，$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ となる．また，$\mathcal{B}_1$ から $\mathcal{B}_2$ への基底変換行列 Q は，$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ となる．よって，$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}_2$ に関する g の表現行列 B は，

$$B = Q^{-1}A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}}.$$