数学演習第二 期末統一試験【問題用紙】

2022 年 2 月 2 日 実施 試験時間 90 分

– 解答用紙には答えのみ記入すること –

$\boxed{1}$ 2 変数関数 $g(x,y)=x^4+x^2y^2-6x^2y+y^2$ に対して，$g(x,y)=0$ 上の点 $(2,\frac{4}{5})$ のまわりで定義される陰関数を $y=\varphi(x)$ とし，$g(x,y)=0$ 上の点 $(2,4)$ のまわりで定義される陰関数を $y=\psi(x)$ とする．

(1) $g(x,y)=0$ を y についての 2 次方程式とみなして解いて整理すると，$\varphi(x)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{3\boxed{\text{イ}}\sqrt{8-x^2}}$ と表される．ア に入るべき x の多項式および イ に入るべき符号（$+$ または $-$）を答えよ．

(2) 曲線 $g(x,y)=0$ 上の点 $(2,\frac{4}{5})$ における接線の方程式を $y=ax+b$ とする．a，b を求めよ．

(3) $\psi''(2)$ の値を求めよ．

(4) $f(x,y)=y$ とする．$g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ が<u>極大値</u>をとる点 (p,q)（およびそのときの極大値）をすべて求めよ．解答欄には，「点 (p,q) で極大値 r をとる」という形式で答えを記せ．

$\boxed{2}$ 次の重積分を計算せよ．

(5) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ $\qquad D:\ 0\le x\le 1,\ x\le y\le -x^2+2$

(6) $\displaystyle\iint_D xy\cos(x^2+y^2)\,dxdy$ $\qquad D:\ x^2+y^2\le\pi,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

(7) $\displaystyle\iiint_D \frac{2}{(x+y+z+1)^3}dxdydz$ $\qquad D: 0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z,\ 0\le x\le 1-y-z$

$\boxed{3}$ (8) $f(x,y)$ を連続関数とするとき，累次積分 $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{6-x^2}}f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換すると，

$$I=\int_0^{\boxed{\text{ア}}}dy\int_0^{\boxed{\text{イ}}}f(x,y)\,dx+\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{ウ}}}dy\int_0^{\boxed{\text{エ}}}f(x,y)\,dx$$

となる．ア から エ に入るべき適切な数値または数式を答えよ．

$\boxed{4}$ 次の重積分 J を考える．

$$J=\iint_D 2xe^{x^2-y^2}\,dxdy \qquad D:\ 0\le x+y\le 1,\ 0\le x-y\le 1$$

(9) $u=x+y$，$v=x-y$ に対して，ヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(10) J の値を求めよ．

$\boxed{5}$ 実数 a に対して，$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 2a+7 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ -6 & 9 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & -3 & 2a+3 \end{bmatrix}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ について以下の設問に答えよ．

(11) $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$ となる a の値を a_0 と書くことにする．a_0 を求めよ．

(12) $a \neq a_0$ のとき，$\dim \operatorname{Im} f$ を求めよ．

(13) $a = a_0$ のとき，$\begin{bmatrix} -2 \\ b \\ 3 \\ c \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} f$ となるように b および c の値を定めよ．

$\boxed{6}$ 実数 α に対して，行列 $A = \begin{bmatrix} -10 & \alpha+1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 18 & -3\alpha & 11 \end{bmatrix}$ を考える．

(14) A の固有値をすべて求めよ．

(15) A の最大固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(16) A が対角化可能であるための α の条件を求めよ．

(17) α が (16) で求めた条件をみたすとき，A^n の $(1,2)$ 成分を求めよ．ただし，n は自然数とする．

$\boxed{7}$ $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V，W を次で定める．

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}.$$

さらに，V の基底 $\mathcal{A}$ および W の 2 組の基底 $\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$ を次で定める．

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_1 = \left(\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

行列 $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定められる線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to W$ および $g(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in V)$ で定められる線形写像 $g : V \to W$ を考える．

(18) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \boxed{\text{ア}}\, \boldsymbol{w}_1 + \boxed{\text{イ}}\, \boldsymbol{w}_2$ と表すことができる．ア と イ に入るべき適切な数式を答えよ．

(19) $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathcal{E} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ とする．$\mathcal{E}$，$\mathcal{B}_1$ に関する f の表現行列を求めよ．

(20) $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}_2$ に関する g の表現行列を求めよ．