数学演習第一（演習第 1 回）【解答例】

微積：極限値, 逆三角関数 (2022 年 4 月 27 日実施)

1　演習問題

$\boxed{1}$ (2) まず, $\dfrac{a^x-1}{x}=\dfrac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\cdot\log a\to\log a\ (x\to 0)$ に注意する．これより, $\dfrac{a^x-b^x}{x}=\dfrac{a^x-1}{x}-\dfrac{b^x-1}{x}\to$ $\log a-\log b=\boxed{\log\left(\dfrac{a}{b}\right)}\ (x\to 0)$ 【別法】 $\dfrac{a^x-b^x}{x}=\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-1}{x}\cdot b^x\to\log\left(\dfrac{a}{b}\right)\ (x\to 0)$.

(6) $y=x-\dfrac{\pi}{3}$ とおくと, $x\to\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y\to 0$. このとき, $\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sin(y+\frac{\pi}{2})-1}{y}=\dfrac{\cos y-1}{y}=$ $-\dfrac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)}=\dfrac{-\sin^2 y}{y(1+\cos y)}=\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^2\dfrac{-y}{1+\cos y}\to 1\cdot 0=\boxed{0}\ (x\to 0)$.

(7) $\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{\sin x}{x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x}\to\boxed{\dfrac{1}{2}}\ (x\to 0)$.

【注】 (6), (7) の解答例では, $1-\cos x$ を $1-\cos x=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ と変形したが, 半角の公式を用いて $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ と変形する方法もよく用いられる．この変形から容易に得られる極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ は基本的.

(8) $x\to 0$ のとき, $\sin x\to 0$ であるから, $\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\dfrac{\cos x}{\cos(\sin x)}\to\boxed{1}\ (x\to 0)$.

【別法】 $\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\cos x\to 1$ を用いて, $\dfrac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\dfrac{\tan(\sin x)}{\sin x}\dfrac{x}{\tan x}\dfrac{\sin x}{x}\to 1$.

(11) $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと, $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to+0$. このとき, $\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x=y\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)=\dfrac{y}{\tan y}=$ $\dfrac{y}{\sin y}\cdot\cos y\to\boxed{1}$.

(12) 自然対数をとって考える. $y=1-x\ (x=1-y)$ とおくと, $x\to 1$ のとき $y\to 0$ であり, $\log x^{\frac{1}{1-x}}=\dfrac{\log x}{1-x}=$ $\dfrac{\log(1-y)}{y}\to -1$. よって, $x^{\frac{1}{1-x}}=e^{\log x^{\frac{1}{1-x}}}\to\boxed{e^{-1}}\left(=\dfrac{1}{e}\right)$.

(13) 自然対数をとって考える. $\cos x=1+(\cos x-1)$ と分解し, (7) と同様な計算を用いて ((7) の【注】も参照), $\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}=\dfrac{\log(1+\cos x-1)}{x^2}=\dfrac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\to 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\ (x\to$ $0)$. よって, $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}\to\boxed{e^{-1/2}}\left(=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(14) $x\to+0$ のとき, $\sin x\to+0$, $\log(\sin x)\to-\infty$ より, $\dfrac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}=\dfrac{\log(\sin 2x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)-\log(\cos x)}=$ $\dfrac{\log(\sin x)+\log(2\cos x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)-\log(\cos x)}=\dfrac{1+\frac{\log(2\cos x)-\log(\cos 2x)}{\log(\sin x)}}{1-\frac{\log(\cos x)}{\log(\sin x)}}\to\boxed{1}$

$\boxed{2}$ (5) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}(-4)$ とおいて, $\sin\alpha$ の値を求める. $\tan\alpha=-4\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=$ $1+\tan^2\alpha=17$. これより, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ なので, $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\boxed{-\dfrac{4}{\sqrt{17}}}$.

(6) $\alpha=\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{2}{5}\right)$ とおいて, $\tan\alpha$ の値を求める. $\sin\alpha=-\dfrac{2}{5}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\cos^2\alpha=$ $1-\sin^2\alpha=\dfrac{21}{25}$ となり, $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$. よって, $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-2/5}{\sqrt{21}/5}=\boxed{-\dfrac{2}{\sqrt{21}}}$.

$\boxed{3}$ (1) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1} 2$ とおくと, $\tan\alpha = 2 > 0$ かつ $\mathrm{Cos}^{-1} x = \alpha$. このとき, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, $\mathrm{Cos}^{-1} x = \alpha$ は解をもち, $x = \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$ で与えられる.

(2) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1} \dfrac{1}{3}$ とおくと, $\sin\alpha = \dfrac{1}{3} > 0$ かつ $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \sin\Big(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\Big) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \boxed{\dfrac{7}{9}}$ で与えられる.

(3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{1}{4}$ とおくと, $\tan\alpha = \dfrac{1}{4} \in (0,1)$ かつ $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$. このとき, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ であるから, $-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{4}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \tan\Big(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\Big) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha} = \dfrac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha}$ で与えられる. ここで, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{8}{15}$ であるから, $x = \dfrac{1 - \frac{8}{15}}{1 + \frac{8}{15}} = \boxed{\dfrac{7}{23}}$ となる.

【注】この種の方程式は解をもたないことがある. 例えば,

- $\mathrm{Cos}^{-1} x = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ は $\boxed{3}$(1) と似ているが, 解をもたない. 実際, $\mathrm{Tan}^{-1}(-2) \in \Big(-\frac{\pi}{2}, 0\Big)$ は関数 $\mathrm{Cos}^{-1} x$ の値域 $[0, \pi]$ に含まれない.
- レポート課題の $\boxed{\text{問題4}}$ に似た問題 $\mathrm{Sin}^{-1} x + 2\,\mathrm{Cos}^{-1}(-3/4) = \pi$ も解をもたない. なぜか?

$\boxed{4}$ (1) $\theta = \mathrm{Sin}^{-1} x$ とおくと, $\sin\theta = x$ $\Big(-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\Big)$. このとき $x = \sin\theta = \cos\Big(\dfrac{\pi}{2} - \theta\Big)$ かつ $0 \le \dfrac{\pi}{2} - \theta \le \pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により $\dfrac{\pi}{2} - \theta = \mathrm{Cos}^{-1} x$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x + \mathrm{Cos}^{-1} x = \theta + \Big(\dfrac{\pi}{2} - \theta\Big) = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおくと, $\tan\theta = x$ $\Big(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\Big)$. ここで, $x > 0$ より $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. このとき,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \tan\Big(\frac{\pi}{2} - \theta\Big)$$

かつ $0 < \dfrac{\pi}{2} - \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから, Tan^{-1} の定義により $\dfrac{\pi}{2} - \theta = \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{1}{x}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{1}{x} = \theta + \Big(\dfrac{\pi}{2} - \theta\Big) = \dfrac{\pi}{2}$.

【注】 $x < 0$ のときには, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ.

$\boxed{5}$ (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$.

(2) $X = e^x > 0$ とおけば,

- $y = \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\Big(X - \dfrac{1}{X}\Big)$ より, $X^2 - 2yX - 1 = 0$. これを X に関する 2 次方程式とみなして, $X > 0$ なる解は $X = e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. よって, $y = \sinh x$ の逆関数は $\boxed{x = \log(y + \sqrt{y^2+1}\,)}$.
- $y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{X - X^{-1}}{X + X^{-1}} = \dfrac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$ より $X^2 = e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ (> 0). この X に関する 2 次方程式の $X > 0$ なる解は $X = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$. よって, $y = \tanh x$ の逆関数は $\boxed{x = \log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}}$ $\Bigg($あるいは $\boxed{x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}}\Bigg)$.

(3) $X = e^x > 0$ とおけば, $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big) \ge 1$ となり, $X^2 - 2yX + 1 = 0$. このとき, $y \ge 1$ であるから, この X に関する 2 次方程式は実数解 $X = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$ をもつ.

- $x \ge 0$ ならば, $X = e^x \ge 1$ より, $X = y + \sqrt{y^2 - 1}$. よって, $y = \cosh x$ $(x \ge 0)$ の逆関数は $\boxed{x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}\,)}$.

- $x \le 0$ ならば, $X = e^x \in (0,1]$ より, $X = y - \sqrt{y^2-1} = \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$. よって, $y = \cosh x$ $(x \le 0)$ の逆関数は $\boxed{x = -\log(y+\sqrt{y^2-1})}$ $\left(\text{あるいは}\ \boxed{x = \log(y-\sqrt{y^2-1})}\right)$.

2 レポート課題

$\boxed{6}$ (1) $y = x - \dfrac{\pi}{6}$ とおくと, $x \to \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y \to 0$. このとき, $\dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\cos(y+\frac{\pi}{2})}{y} = \dfrac{-\sin y}{y} \to \boxed{-1}$ $(x \to 0)$.

(2) 自然対数をとって考える. $\log(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{\log(1+\sin 3x)}{x} = \dfrac{\log(1+\sin 3x)}{\sin 3x}\dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \to 3$ $(x \to 0)$. よって, $(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}} = e^{\log(1+\sin 3x)^{\frac{1}{x}}} \to \boxed{e^3}$.

$\boxed{7}$ (1) $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$, $\tan\beta = \dfrac{a-b}{a+b}$ より, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{b}{a}+\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{b}{a}\frac{a-b}{a+b}} = \dfrac{b(a+b)+a(a-b)}{a(a+b)-b(a-b)} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = \boxed{1}$.

(2) $a < 0$, $b > 0$ より , $a-b < 0$. また, $a+b > 0$ より $\dfrac{b}{a} < 0$, $\dfrac{a-b}{a+b} < 0$. よって, $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0$ で $-\pi < \alpha+\beta < 0$. この範囲で $\tan(\alpha+\beta) = 1$ をみたすのは, $\alpha+\beta = \boxed{-\dfrac{3\pi}{4}}$.