

# 数学演習第一 (演習第2回)

線形：平面の方程式, 行列の演算

2022 年 5 月 11 日

## 要点1

《表記上の注意》

- 高校ではベクトルを  $\vec{p}$  (矢印) の形で表したが, ここでは  $\mathbf{p}$  (太字) と表記する. 零ベクトルは  $\mathbf{0}$  で表す.
- ベクトル  $\mathbf{p}$  に対して, 「点  $\mathbf{p}$ 」は  $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$  ( $O$  は原点) となる点  $P$  を表す ( $\mathbf{p}$  は点  $P$  の位置ベクトル).

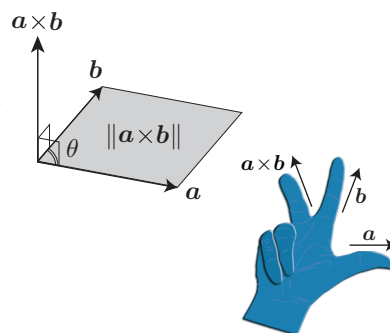
I 空間ベクトル  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  に対して,

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ,  $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$  をそれぞれ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の内積,  $\mathbf{a}$  の長さ (大きさ, ノルム) という.  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  のとき,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角を  $\theta \in [0, \pi]$  とすれば,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$  が成り立つ. (平面ベクトルの場合も同様.)
- $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  のとき,  $\mathbf{b}$  は  $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{b}''$  ( $\mathbf{b}' = k\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}'' \cdot \mathbf{a} = 0$ ) の形に分解できる. このとき,  $\mathbf{b}'$  を  $\mathbf{b}$  の「 $\mathbf{a}$  に平行な直線」への正射影,  $\mathbf{b}''$  を  $\mathbf{b}$  の「 $\mathbf{a}$  に垂直な平面」への正射影と呼ぶ. (平面ベクトルの場合,  $\mathbf{b}''$  は  $\mathbf{b}$  の「 $\mathbf{a}$  に垂直な直線」への正射影となる.)

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$  を  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の外積 (= ベクトル積) と呼ぶ.

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  が平行でないとき,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角を  $\theta \in (0, \pi)$  とすれば,

- ①  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の両方に垂直,
- ②  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は右手系,
- ③  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ が作る平行四辺形の面積}).$

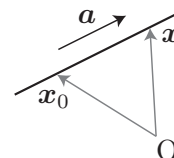


II 空間の点  $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$  とベクトル  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$  に対して,

- 点  $\mathbf{x}_0$  を通り,  $\mathbf{a}$  を方向ベクトルとする直線 ( $\mathbf{a}$  に平行な直線) の方程式は,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a} \quad \left( \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \text{ より, } \boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

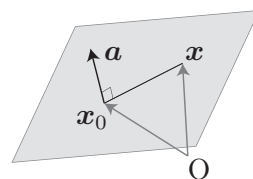
(右上の表現は  $abc \neq 0$  の場合の形. 例えば  $ab \neq 0, c = 0$  なら,  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, z = z_0$  となる.)



- 点  $\mathbf{x}_0$  を通り,  $\mathbf{a}$  を法線ベクトルとする平面 ( $\mathbf{a}$  に垂直な平面) の方程式は,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0, \text{ すなわち } \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}.$$

(右上の表現は通常  $ax + by + cz + d = 0$  または  $ax + by + cz = d$  の形に整理する.)



## 要点2

- $l \times m$  行列  $A$  と  $m \times n$  行列  $B$  に対して,  $l \times n$  行列  $AB$  ( $A, B$  の積) が次により定義される:  $AB$  の  $(i, j)$  成分は  $A$  の第  $i$  行と  $B$  の第  $j$  列の「内積」である. また,  $B$  の  $(i, j)$  成分を  $(j, i)$  成分とする  $n \times m$  行列を  $B$  の転置行列と呼び,  ${}^tB$  で表す.
- 同じサイズの正方行列  $A, B$  に対して, 積  $AB, BA$  が定義されるが, 数の場合と異なり, 「 $AB = BA$ 」 「 $AB = O \Rightarrow A = O \text{ or } B = O$ 」 が成り立つとは限らない.
- 正方行列  $A$  に対して,  $AB = BA = E$  を満たす  $B$  が存在するとき (存在すれば一意),  $B$  を  $A$  の逆行列と呼び,  $A^{-1}$  で表す. また, 逆行列をもつ行列を正則行列という. 2 次正方行列の場合は

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ が正則 } \Leftrightarrow ad - bc \neq 0. \text{ このとき, } A \text{ の逆行列は } \boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}.$$

# 1 演習問題

**1** ベクトル  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  に対して, 以下を計算せよ. ((4), (5) については線形第 1 節参照)

- (1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$     (2)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  のなす角    (3)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$     (4)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の作る平行四辺形の面積 ( $= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ )  
 (5)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の作る平行六面体の体積 ( $= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ )    (6)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の作る四面体の体積

**2** 空間ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ( $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , かつ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  は平行でない) に対して, 次の主張を示せ.

- (i)  $\mathbf{b}$  の「 $\mathbf{a}$  に平行な直線」への正射影は  $\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$ , その長さは  $\|\mathbf{b}'\| = \frac{|\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|}$ .  
 (ii)  $\mathbf{b}$  の「 $\mathbf{a}$  に垂直な平面」への正射影は  $\mathbf{b}'' = \mathbf{b} - \mathbf{b}' = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$ , その長さは  $\|\mathbf{b}''\| = \frac{\|\mathbf{b} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}$ .

更に, **1** の  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  に対して, 以下を計算せよ.

- (7)  $\mathbf{c}$  の「 $\mathbf{a}$  に平行な直線」への正射影    (8)  $\mathbf{c}$  の「 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に平行な平面」への正射影

**3** 空間の 3 点  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(2, -2, 1)$ ,  $C(-1, 2, 0)$  について, 次の問いに答えよ.

- (1) 2 点  $A, B$  を通る直線 (直線  $AB$  と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント:  $\overrightarrow{AB}$  が方向ベクトル)  
 (2) 3 点  $A, B, C$  を通る平面 (平面  $ABC$  と呼ぶ) の方程式を求めよ. (ヒント:  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$  が法線ベクトル)  
 (3) 原点  $O$  から平面  $ABC$  に下ろした垂線の長さを求めよ.  
 (4) 点  $C$  から直線  $AB$  に下ろした垂線の長さを求めよ.

**4**  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  のとき, 次の行列を求めよ.

- (1)  $3A - 2B$     (2)  $3X + 2A = B$  を満たす行列  $X$     (3)  $AC$     (4)  $B^t C^t A$

**5**  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  の正則性, 逆行列について考える.

- (1)  $(A - aE)(A - dE)$  ( $E$  は 2 次単位行列) を計算して, 次の関係式を導け:

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O.$$

- (2)  $\tilde{A} := (a + d)E - A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  とおくと, (1) の関係式から,  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad - bc)E$  を導け.

- (3) (2) で導いた関係式を用いて, 次の主張を示せ.

- ①  $ad - bc \neq 0$  ならば,  $A$  は正則であり, その逆行列は  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \tilde{A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ .  
 ②  $ad - bc = 0$  ならば,  $A$  は正則でない.

**6** 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, 次の問いに答えよ.

- (1) 次の行列の逆行列を求めよ: ①  $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ , ②  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$  ( $r \neq 0$ ).

- (2)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  のとき,  $AX = B$  を満たす行列  $X$  を求めよ.

**7** 次の満たす 2 次正方行列  $P, Q_\theta, R_\theta$  を定めよ.

- (1) 点  $(x, y)$  を  $x$  軸に関して対称移動した点を  $(x', y')$  とするとき, 2 点の関係を  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  の形に書き表せ.  
 (2) 点  $(x, y)$  を原点の周りに  $\theta$  だけ回転移動した点を  $(x', y')$  とするとき, 2 点の関係を  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  の形に書き表せ. 【ヒント】複素数平面上で考えれば,  $x' + iy' = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy)$  と書ける.

(3)  $x$  軸を原点の周りに  $\theta$  だけ回転移動した直線を  $\ell_\theta$  とする. 点  $(x, y)$  を  $\ell_\theta$  に関して対称移動した点を  $(x', y')$  とするとき, 2 点の関係を  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  の形に書き表せ.

【ヒント】点  $(x, y)$  を, まず原点の周りに  $-\theta$  だけ回転移動し (この回転移動で  $\ell_\theta$  は  $x$  軸に重なる), 次に  $x$  軸に関して対称移動し, 最後に原点の周りに  $\theta$  だけ回転移動すれば点  $(x', y')$  が得られる.

## 2 レポート問題 (WebClass 提出用)

答案 (計算過程も含める) を A4 用紙 (複数枚用いてよい) にまとめ, pdf 書類に変換して提出して下さい.

**問題 1** 平面  $\alpha: x + 4y + 2z - 1 = 0$  と直線  $\ell: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-2$  の交点を  $P$  とする. 点  $P$  において直線  $\ell$  と垂直に交わる平面  $\alpha$  上の直線 ( $m$  とする) の方程式を求めよ.

【ヒント】 ① 点  $P$  は  $\ell$  上にあるから  $(3t-2, -2t-1, t+2)$  の形に表され, これが  $\alpha$  上にあることから  $t$  が定まる. ②  $m$  の方向ベクトルは,  $\alpha$  の法線ベクトル,  $\ell$  の方向ベクトルの両方と垂直である.

**問題 2**  $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$  のとき,  ${}^t(2X + A) = 3B$  を満たす行列  $X$  を求めよ.

**問題 3** 3 つの行列  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  を (3 つの行列の) 積が定義されるような順に並べ, その積を計算せよ. 【ヒント】 3 通りの並べ方がある.

**問題 4**  $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$  のとき, 2 次正則行列の逆行列の公式を利用して,  $XA = AB$  を満たす行列  $X$  を求めよ.