数学演習第一（演習第 2 回）【解答例】

線形：平面の方程式, 行列の演算 (2022 年 5 月 11 日実施)

1 演習問題

$\boxed{1}$ (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boxed{-3}$. (2) なす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. よって, $\theta = \boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$.

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$. (4) ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積) $= \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \boxed{\sqrt{3}}$. ($\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ を計算してもよい.)

(5) ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積) $= |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = |3-1+2| = \boxed{4}$.

(6) 四面体の体積は平行六面体の体積に対して, 底面の面積は半分で, 更に錐となっているので体積は 1/6 となる.

($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る四面体の体積) $= \dfrac{1}{6}$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積) $= \dfrac{1}{6}|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = \dfrac{4}{6} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

$\boxed{2}$ (i) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' + \boldsymbol{b}'' = k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}''$ と $\boldsymbol{a}$ との内積をとれば, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = k\|\boldsymbol{a}\|^2$. よって, $k = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})/\|\boldsymbol{a}\|^2$ となり,

$$\boldsymbol{b}' = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = (\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}, \quad \|\boldsymbol{b}'\| = \frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \|\boldsymbol{b}\||\cos\theta| \quad (\theta \in (0, \pi) \text{ は } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ のなす角}).$$

(ii) (i) の結果より, $\boldsymbol{b}'' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'' = \boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$. また, $\boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}'', \boldsymbol{b}$ は直角三角形の 3 辺に重なるから,

$$\|\boldsymbol{b}''\| = \sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{b}'\|^2} = \sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2\cos^2\theta} = \|\boldsymbol{b}\|\sin\theta = \frac{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{a}\|\sin\theta}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{\|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}.$$

次に, $\boxed{1}$ の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して,

(7) $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}$ に平行な直線」への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \dfrac{-1}{2}\boldsymbol{a} = \boxed{\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}}$.

(8) まず, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面の法線ベクトルとして $\boldsymbol{n} := \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ をとる. $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{n}$ に平行な直線」への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} = \dfrac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \dfrac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. よって, $\boldsymbol{c}$ の「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面」への正射影は

$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \dfrac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}} = \boxed{\begin{bmatrix} 5/3 \\ 7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{3}$ (1) 直線 AB は点 A$(1, 0, 2)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, 方程式は $\boxed{x - 1 = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}}$.

(2) 平面 ABC は点 A$(1, 0, 2)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから,

方程式は $3(x-1) + 2y - (z-2) = 0$. これを整理して, $\boxed{3x + 2y - z - 1 = 0}$ (または $\boxed{3x + 2y - z = 1}$).

(3) 原点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすとき, 直線 OH は原点 O を通り, 平面 ABC の法線ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, H$(3s, 2s, -s)$ と書ける. 更に, H は平面 ABC 上の点であるから, $3\cdot 3s + 2\cdot 2s - (-s) - 1 = 0$ を満たす. これを解いて $s = \dfrac{1}{14}$ となり, H の座標は $\left(\dfrac{3}{14}, \dfrac{2}{14}, -\dfrac{1}{14}\right)$ で, 垂線の長さは $\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\| = \dfrac{1}{14}\sqrt{9+4+1} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{14}}}$.

【別法】求める垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の「平面 ABC の法線」($\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に平行) への正射影の長さに他ならない. よって, $\boxed{2}$ (i) を用いて, (垂線の長さ) $= \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}})|}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|} = \dfrac{|6+0-4|}{2\sqrt{14}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{14}}}$.

【補足】一般に, 点 (x_1, y_1, z_1) から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の長さは $\boxed{\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ で与えられる. この事実を示そう. 点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1, z_1)$ とし, 平面 $ax+by+cz+d=0$ 上に点 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ をとる. このとき, 垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ の平面 $ax+by+cz+d=0$ の法線 ($\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとする) への正射影の長さに他ならない. このとき, $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ であるから, $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \cdot \boldsymbol{n}$ は

$$a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0) = (ax_1+by_1+cz_1)-(ax_0+by_0+cz_0) = ax_1+by_1+cz_1+d$$

と計算される. よって, 求める垂線の長さは $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \cdot \boldsymbol{n}|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(4) 点 C から直線 AB に垂線 CK を下ろすとき, 点 K は直線 AB 上の点であるから, $\mathrm{K}(t+1, -2t, -t+2)$ と書ける. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \begin{bmatrix} t+2 \\ -2t-2 \\ -t+2 \end{bmatrix}$ と直線 AB は垂直ゆえ, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t+2 \\ -2t-2 \\ -t+2 \end{bmatrix} = t+2-2(-2t-2)-(-t+2) = 0$. これより $t = -\dfrac{2}{3}$ が得られ, 点 K の座標は $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{2}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ であるから, 垂線の長さは $\|\overrightarrow{\mathrm{CK}}\| = \dfrac{2}{3}\sqrt{4+1+16} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{21}}{3}} = \boxed{2\sqrt{\dfrac{7}{3}}}$.

【別法】求める垂線の長さは $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の「直線 AB に垂直な平面」への正射影の長さに他ならない. よって, $\boxed{2}$ (ii) を用いて, (垂線の長さ) $= \dfrac{\|\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}\|}{\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|} = \dfrac{2\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}$.

$\boxed{4}$ (1) $3A-2B = \boxed{\begin{bmatrix} 10 & -5 & -1 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix}}$. (2) $X = \dfrac{1}{3}(B-2A) = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$.

(3) $AC = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}}$.

(4) $B\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}A = B\,{}^{\mathrm{t}}(AC) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -11 & -14 \\ 13 & -6 \end{bmatrix}}$.

$\boxed{5}$ (1) $(A-aE)(A-dE) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = bcE$. 左辺を展開すれば $A^2-(a+d)A+adE$ であるから, 確かに $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E = O$ が成り立つ.

(2) (1) の関係式より, $(ad-bc)E = (a+d)A-A^2 = A((a+d)E-A) = ((a+d)E-A)A$. よって, $\widetilde{A} = (a+d)E-A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおけば, 確かに $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad-bc)E$ が成り立つ.

(3) ① $ad-bc \neq 0$ ならば, (2) の関係式の両辺を $ad-bc \neq 0$ で割り, $A\left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right) = \left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right)A = E$. 定義により $\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}$ は A の逆行列である (A は正則): $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

② $ad-bc = 0$ ならば $A\widetilde{A} = O$ となるが, このとき A が逆行列 A^{-1} をもつ (= 正則) と仮定すれば, $\widetilde{A} = (A^{-1}A)\widetilde{A} = A^{-1}(A\widetilde{A}) = A^{-1}O = O$ となり, $A = O$ が従う (成分に注目). ところが, $A = O$ はどんな 2 次正方行列を掛けても O となるので, A が逆行列をもつという仮定に矛盾する.

$\boxed{6}$ (1) 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, ① $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}}$,

② $\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}}$.

(2) $AX = B$ の両辺の左側から A^{-1} を掛けて,

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}.$$

$\boxed{7}$ (1) $(x', y') = (x, -y)$ より, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. すなわち, $P = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$.

(2) $x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$ より,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad \text{すなわち,}\ Q_\theta = \boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}.$$

(3) ヒントにより, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q_\theta\left(P\left(Q_{-\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)\right) = Q_\theta P Q_{-\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ が成り立つ (第 2 の等号は行列の積の結合法則による). よって,

$$\begin{aligned} R_\theta = Q_\theta P Q_{-\theta} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}}. \end{aligned}$$

2 レポート問題

問題 1 点 P の座標は $(3t-2, -2t-1, t+2)$ の形に表される. $(3t-2) + 4(-2t-1) + 2(t+2) - 1 = 0$ より $t = -1$ が得られ, $\mathrm{P}(-5, 1, 1)$ と分かる. 次に, α の法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ と ℓ の方向ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を用いて, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} -8 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix} /\!/ \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -14 \end{bmatrix}$ が m の方向ベクトルとなる. よって, 直線 m の方程式は $\boxed{\dfrac{x+5}{8} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-1}{-14}}$.

問題 2 ${}^{\mathrm{t}}(2X + A) = 3B$ より, $2X + A = {}^{\mathrm{t}}(3B) = 3\,{}^{\mathrm{t}}B$. よって,

$$X = \frac{1}{2}(3\,{}^{\mathrm{t}}B - A) = \frac{1}{2}\left(3\begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}\right) = \boxed{\begin{bmatrix} 4 & -1 & -8 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix}}.$$

問題 3 行列 A, B, C のサイズはそれぞれ 2×3, 3×2, 2×2 であるから, 3 つの行列の積が定義できるのは ABC, BCA, CAB の 3 通り. それぞれの積を計算すると,

$$ABC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}},$$

$$BCA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -6 & 1 & 3 \end{bmatrix}},$$

$$CAB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}.$$

問題 4 $XA = AB$ の両辺の右側から A の逆行列 $A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ を掛けることにより,

$$X = ABA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -38 \\ 11 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}.$$